Semaine 14 du 13 au 17 janvier 2025

Limites et continuité d'une fonction de variable réelle

I) *Limite finie en un point*

- Limite finie ou infinie en a d'une fonction à valeurs réelles ou complexes
- Unicité de la limite
- Si f définie en a admet une limite en a, cette limite est $f(a)$
- Si f possède une limite finie en a elle est bornée au voisinage de a
- Limite à gauche et à droite
- Caractérisation séquentielle

II) *Opérations sur les limites*

- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition
- Passage à la limite d'une inégalité large

III) *Théorèmes d'existence de limites*

- Existence d'une limite par encadrement, minoration, majoration
- Théorème de la limite monotone

IV) *Continuité en un point*

- Continuité à gauche, à droite, prolongement par continuité
- Caractérisation séquentielle
- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition

V) *Continuité sur un intervalle*

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Cas d'une fonction continue strictement monotone
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Théorème des bornes atteintes
- Toute fonction réelle continue sur un intervalle et injective est strictement monotone
- Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle admet une bijection réciproque continue et de même monotonie

VI) *Continuité uniforme*

- Fonctions lipschitziennes
- Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues
- Théorème de Heine

Dérivation d'une fonction de variable réelle

I) *Nombre dérivé, fonction dérivée*

- Nombre dérivé défini par la limite du taux d'accroissement
- Caractérisation de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire
- Développement limité à l'ordre 1
- Interprétation géométrique et cinématique
- Dérivabilité à gauche, à droite
- Dérivée sur un intervalle

Démonstrations exigibles

Limites
- Caractérisation séquentielle de la limite
- Théorème de la limite par encadrement
- Théorème de la limite monotone

Continuité
- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème de Heine

Dérivation
- Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1

Exercices préparés

Continuité
- La fonction $x \mapsto x\cos(x) - x^3\sin(x)$ admet-elle une limite en $+\infty$?
- Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et de limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.
- Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
- Donner un exemple de fonction continue mais pas uniformément continue (en justifiant).
- Donner un exemple de fonction uniformément continue non lipschitzienne (en justifiant).