Semaine 15 du 20 au 24 janvier 2025

Dérivation d'une fonction de variable réelle

I) Nombre dérivé, fonction dérivée

- Nombre dérivé défini par la limite du taux d'accroissement
- Caractérisation de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire
- Développement limité à l'ordre 1
- Interprétation géométrique et cinématique
- Dérivabilité à gauche, à droite
- Dérivée sur un intervalle

II) Opérations sur les fonctions dérivables

- Combinaison linéaire
- Produit, quotient, composée
- Dérivée d'une bijection réciproque

III) Propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles

- Tout extremum local en un point intérieur est un point critique
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis (égalité)
- Inégalité des accroissements finis
- Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$
- Théorème de la limite de la dérivée

IV) Propriétés des fonctions dérivables à valeurs complexes

- Caractérisation des fonctions constantes
- Inégalité des accroissements finis

V) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- Dérivée k-ème, fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$
- Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque

Dém. exigibles

Dérivation

- Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1
- Condition nécessaire d'extremum local : point critique
- Théorème de Rolle
- Égalité des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Théorème de la limite de la dérivée

Exercices préparés

Dérivabilité

- Soit f à valeurs réelles, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, vérifiant $f(a) = \lim\limits_{+\infty} f$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = (t^2 - 1)^n$. Montrer à l'aide de la formule de Leibniz que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $f_n^{(k)}(1) = f_n^{(k)}(-1) = 0$. Montrer ensuite que $f_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]-1, 1[$.