Semaine 16 du 27 au 31 janvier 2025

Fonctions convexes

I) Généralités sur les fonctions convexes

- Définition, interprétation géométrique, inégalité de Jensen
- Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes
- Position relative du graphe par rapport à ses sécantes

II) Fonctions convexes dérivables

- Caractérisation de la convexité par la croissance de la dérivée
- Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables par $f'' \geqslant 0$
- Position relative du graphe d'une fonction convexe et de ses tangentes

Polynômes

I) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau intègre $\mathbb{K}[X]$
- Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire
- Degré d'une somme, d'un produit
- Composition et degré d'une composée
- Diviseurs, multiples
- Division euclidienne
- Dérivée formelle : combinaison linéaire, produit dont formule de Leibniz, composée

II) Fonctions polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Formule de Taylor polynomiale
- Racine, caractérisation en terme de divisibilité
- Multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des dérivées
- Le nombre de racines est majoré par le degré
- Polynôme scindé, relations coefficients-racines

Démonstrations exigibles

Convexité

- Inégalité de Jensen
- Caractérisation des fonctions convexes dérivables et des fonctions convexes deux fois dérivables

Polynômes

- Existence et unicité dans la division euclidienne
- Le nombre α est racine de P ssi P est divisible par $X - \alpha$
- Relations coefficients-racines
- Formule de Taylor polynomiale

Exercices préparés

Convexité

- Montrer l'inégalité arithmético-géométrique pour des réels strictement positifs :

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

- Montrer que si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont convexes et g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.

Polynômes

- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(X+1) - P(X) = 0$.