Semaine 17 du 3 au 7 février 2025

Polynômes

I) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau intègre $\mathbb{K}[X]$
- Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire
- Degré d'une somme, d'un produit
- Composition et degré d'une composée
- Diviseurs, multiples
- Division euclidienne
- Dérivée formelle : combinaison linéaire, produit dont formule de Leibniz, composée

II) Fonctions polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Formule de Taylor polynomiale
- Racine, caractérisation en terme de divisibilité
- Multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des dérivées
- Le nombre de racines est majoré par le degré
- Polynôme scindé, relations coefficients-racines
- Formule d'interpolation de Lagrange et description des polynômes vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

III) Polynômes irréductibles

- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Décomposition en produit de facteurs irréductibles, dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité
- Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine commune
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$

IV) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- PGCD, algorithme d'Euclide, relation de Bézout, PPCM
- Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, deux à deux
- Théorème de Bézout, lemme de Gauss

V) Fractions rationnelles

- Corps $\mathbb{K}(X)$, forme irréductible
- Degré, partie entière, zéro, pôle, multiplicité
- Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$
- Si λ est pôle simple de $\frac{A(X)}{B(X)}$ sous forme irréductible, alors l'élément simple associé à ce pôle est $\frac{A(\lambda)/B'(\lambda)}{X-\lambda}$
- Décomposition en éléments simples de P'/P

Démonstrations exigibles

Polynômes

- Existence et unicité d'un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$
- Formule de Taylor polynomiale
- Lemme de Gauss
- Si $A \wedge B = 1$, $A|C$ et $B|C$ alors $AB|C$
- Si $A \wedge C = 1$ et $B \wedge C = 1$, alors $(AB) \wedge C = 1$

Fractions rationnelles

- L'élément simple associé à un pôle simple λ de $\frac{A}{B}$ a pour coefficient $A(\lambda)/B'(\lambda)$
- Décomposition en éléments simples de P'/P

Exercices préparés

Polynômes

- Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n vérifiant $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $P(n+1)$. *On pourra s'intéresser à* $(X+1)P - X$.
- Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \end{cases}$