Semaine 18 du 10 au 14 février 2025

Polynômes et fractions rationnelles

V) Fractions rationnelles

- Corps $\mathbb{K}(X)$, forme irréductible
- Degré, partie entière, zéro, pôle, multiplicité
- Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$
- Si λ est pôle simple de $\frac{A(X)}{B(X)}$ sous forme irréductible, alors l'élément simple associé à ce pôle est $\frac{A(\lambda)/B'(\lambda)}{X-\lambda}$
- Décomposition en éléments simples de P'/P

Matrices

I) Opérations sur les matrices

- Addition, multiplication par un scalaire
- Produit matriciel, bilinéarité, associativité
- Matrices élémentaires, produit, symbole de Kronecker
- Transposée, transposée d'un produit

II) Systèmes linéaires

- Écriture matricielle AX=B
- Interprétation des opérations élémentaires de pivot en terme de produit matriciel
- Système compatible, structure de l'ensemble des solutions
- Algorithme du pivot

III) Anneau des matrices carrées

- Anneau non commutatif $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice idendité I_n
- Matrices scalaires, symétriques, antisymétriques
- Formule du binôme
- Produit de matrices diagonales ou triangulaires
- Matrice inversible, groupe linéaire
- Inverse d'une transposée
- Calcul de l'inverse par opérations élémentaires ou par résolution du système AX=B

À partir de mardi :

- Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse est triangulaire
- Calculs de puissances de matrice

Démonstrations

Matrices

- Associativité du produit matriciel
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- Si X_p est solution particulière d'un système compatible $AX = B$, l'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des matrices de la forme $X_p + Y$ avec Y solution du système homogène $AX = 0$
- Si A est inversible, $A^\top$ l'est aussi et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

Exercices préparés

Fractions rationnelles

- Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$: $\frac{1}{X(X^2+1)}$.

Matrices (à partir de mardi)

- Montrer que $\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$ est un groupe multiplicatif.