

Matrices

I) Opérations sur les matrices

- Addition, multiplication par un scalaire
- Produit matriciel, bilinéarité, associativité
- Matrices élémentaires, produit, symbole de Kronecker
- Transposée, transposée d'un produit

II) Systèmes linéaires

- Écriture matricielle $AX=B$
- Interprétation des opérations élémentaires de pivot en terme de produit matriciel
- Système compatible, structure de l'ensemble des solutions
- Algorithme du pivot

III) Anneau des matrices carrées

- Anneau non commutatif $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice identité I_n
- Matrices scalaires, symétriques, antisymétriques
- Formule du binôme
- Produit de matrices diagonales ou triangulaires
- Matrice inversible, groupe linéaire
- Inverse d'une transposée
- Calcul de l'inverse par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX=B$
- Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire; l'inverse est triangulaire
- Calculs de puissances de matrice

Analyse asymptotique

I) Relations de comparaison

- Domination, négligeabilité, équivalence
- Croissances comparées
- Obtention d'un équivalent par encadrement
- Conservation du signe et de la limite par équivalence

II) Développements limités

- Unicité des coefficients, troncature
- Cas des fonctions paires ou impaires

- Lien avec la continuité et la dérivabilité
- Signe de f au voisinage de a
- Primitivation d'un développement limité
- Formule de Taylor-Young pour f de classe \mathcal{C}^n

III) Développements limités usuels, opérations

- Développements limités en 0 de \exp , \ln , \cos , \sin , $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, $x \mapsto \text{Arctan}(x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$
- Développement à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \tan(x)$
- Combinaison linéaire, produit, quotient

Suite à partir de mardi

IV) Application des développements limités

- Exemples de développement asymptotique
- Application à l'étude locale d'une fonction : limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, asymptotes
- Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur
- Exemple de développement limité d'une fonction réciproque

Démonstrations

- Équivalence entre $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $f(x) = g(x) + o(g(x))$
- Unicité d'un développement limité
- Primitivation d'un développement limité (deuxième preuve du cours)
- Formule de Taylor-Young
- Démontrer l'un des développements limités usuels

Exercices préparés

- Montrer que $\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$ est un groupe multiplicatif.

- Une matrice carrée est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Développements limités

- Déterminer le DL en 0 à l'ordre 3 des fonctions définies par $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$ et $g(x) = e^{2 \cos(x)}$.