Semaine 20 du 10 au 14 mars 2025

Analyse asymptotique

I) Relations de comparaison

- Domination, négligeabilité, équivalence
- Croissances comparées
- Obtention d'un équivalent par encadrement
- Conservation du signe et de la limite par équivalence

II) Développements limités

- Unicité des coefficients, troncature
- Cas des fonctions paires ou impaires
- Lien avec la continuité et la dérivabilité
- Signe de f au voisinage de a
- Primitivation d'un développement limité
- Formule de Taylor-Young pour f de classe $\mathcal{C}^n$

III) Développements limités usuels, opérations

- Développements limités en 0 de exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$
- Développement à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \tan(x)$
- Combinaison linéaire, produit, quotient

IV) Application des développements limités

- Exemples de développement asymptotique
- Application à l'étude locale d'une fonction : limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, asymptotes
- Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur
- Exemple de développement limité d'une fonction réciproque

Espaces vectoriels

I) Généralités

- Définition, produit d'espaces vectoriels
- Espaces K^n, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, E^X si E est un espace vectoriel et X un ensemble
- Combinaison linéaire

II) Sous-espaces vectoriels

- Caractérisation
- Intersection de sous-espaces vectoriels
- Sous-espaces $\{0\}$, $\mathbb{K}_n[X]$
- Droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$
- Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $AX = 0$
- Sous-espace vectoriel engendré

III) Familles de vecteurs

- Familles génératrices, libres, bases
- Liberté d'une famille de polynômes de degrés distincts
- Toute famille de polynômes de degrés distincts est une base
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$

IV) Somme de deux sous-espaces

- Somme, somme directe
- Caractérisation d'une somme directe par $F \cap G = \{0_E\}$.
- Sous-espaces supplémentaires

Démonstrations

Espaces vectoriels

- L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs d'une partie A est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit contenant A.
- La somme $F + G$ est directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.
- Toute famille de polynômes de degrés distincts est libre.

Exercices préparés

Développements limités

- Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/x}$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et étudier la position relative de la courbe représentative de f et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Espaces vectoriels

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.