Semaine 21 du 17 au 21 mars 2025

Espaces vectoriels

I) Généralités

- Définition, produit d'espaces vectoriels
- Espaces K^n, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, E^X si E est un e.v. et X un ensemble
- Combinaison linéaire

II) Sous-espaces vectoriels

- Caractérisation
- Intersection de sous-espaces vectoriels
- Sous-espaces $\{0\}$, $\mathbb{K}_n[X]$
- Droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$
- Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène $AX = 0$
- Sous-espace vectoriel engendré

III) Familles de vecteurs

- Familles génératrices, libres, bases
- Liberté d'une famille de polynômes de degrés distincts
- Toute famille de polynômes de degrés distincts est une base
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$

IV) Somme de deux sous-espaces

- Somme, somme directe
- Caractérisation d'une somme directe par $F \cap G = \{0_E\}$.
- Sous-espaces supplémentaires

V) Espaces vectoriels de dimension finie

- Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite
- Dimension d'un espace de dimension finie
- Caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs
- Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Dimension de l'espace des suites solutions d'une relation de récurrence linéaire homogène sur deux rangs, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants
- Dimension d'un produit d'espaces de dimension finie
- Rang d'une famille finie de vecteurs

VI) Dimension d'un sous-espace

- Si $F \subset E$ alors $\dim F \leqslant \dim E$, cas d'égalité
- Formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
- Existence d'un supplémentaire, base adaptée
- Caractérisation dimensionnelle de $E = F \oplus G$

Applications linéaires

I) Généralités

- Application linéaire, combinaison linéaire, composition
- Isomorphisme et linéarité de la réciproque
- Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire
- Image, noyau
- L'image est engendrée par l'image d'une famille génératrice
- Caractérisation de l'injectivité par le noyau

II) Endomorphismes

- Anneau $\mathcal{L}(E)$
- Homothétie, projection sur F parallèlement à G lorsque $E = F \oplus G$
- Une projection est linéaire et vérifie $p \circ p = p$
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Démonstrations exigibles

Espaces vectoriels

- L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- L'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs d'une partie A est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit contenant A.
- Toute famille de polynômes de degrés distincts est libre.
- La somme $F+G$ est directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.
- Formule de Grassmann
- Si E est de dimension finie, deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième : (a) $E = F + G$ (b) $F + G$ est directe (c) $\dim E = \dim F + \dim G$

Applications linéaires

- Si u est un isomorphisme, u^{-1} est linéaire
- L'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel sont des espaces vectoriels

Exercices préparés

Espaces vectoriels

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Si $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, F est le s.e.v. des fonctions constantes et G celui des fonctions d'intégrale nulle, alors $E = F \oplus G$.