Semaine 22 du 24 au 28 mars 2025

Applications linéaires

I) Généralités

- Application linéaire, combinaison linéaire, composition
- Isomorphisme et linéarité de la réciproque
- Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire
- Image, noyau
- L'image est engendrée par l'image d'une famille génératrice
- Caractérisation de l'injectivité par le noyau

II) Endomorphismes

- Anneau $\mathcal{L}(E)$
- Homothétie, projection sur F parallèlement à G lorsque $E = F \oplus G$
- Une projection est linéaire et vérifie $p \circ p = p$
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
- Si $E = F \oplus G$, projection sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G
- Caractérisation des projections par $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$, des symétries par $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{id}$

III) Détermination d'une application linéaire

- Détermination par image d'une base
- Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, détermination de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ à partir de $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$
- Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$.

IV) Applications linéaires en dimension finie

- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$
- Deux e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension
- Théorème du rang

V) Formes linéaires et hyperplans

- Forme linéaire
- Hyperplan : noyau d'une forme linéaire non nulle
- H est un hyperplan ssi il admet une droite vectorielle comme supplémentaire
- Deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi elles sont colinéaires
- Si E est de dimension finie n, une intersection de m hyperplan est de dimension au moins $n - m$
- Réciproquement tout sous-espace de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans

Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

- Sous-espace affine, direction, exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- Intersection de sous-espaces affines

À partir de mardi :

- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des solutions de $u(x) = b$ est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}\, u$
- Exemples : ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire, suites arithmético-géométriques

Démonstrations exigibles

Applications linéaires

- Si u est un isomorphisme, u^{-1} est linéaire
- L'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel sont des espaces vectoriels
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p^2 = p$, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ est p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$, alors $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ est s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$
- Forme géométrique du théorème du rang
- Théorème du rang
- Un s.e.v. est un hyperplan ssi il admet un supplémentaire de dimension 1
- Deux formes linéaires non nulles φ et ψ ont même noyau ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$
- Un intersection de m hyperplans est de dimension au plus $n - m$

Exercices préparés

Applications linéaires

- Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $u : M \mapsto AM$ et $\mathbb{K}[A] = \left\{ P(A) \;\middle|\; P \in \mathbb{K}[X] \right\}$.
Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par u.
En déduire que u induit un isomorphisme de $\mathbb{K}[A]$ et conclure que A^{-1} est un polynôme en A.
- Soient $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs de même noyau si et seulement si $p = pq$ et $q = qp$.