

## Nombres complexes

## I) Ensemble des nombres complexes

- Partie réelle, imaginaire, opérations
- Plan complexe
- Conjugaison, image dans le plan complexe
- Module,  $|z|^2 = z\bar{z}$
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité

## II) Nombres complexes de module 1

- Cercle trigonométrique
- Exponentielle d'un nombre imaginaire pur
- Exponentielle d'une somme
- Formules d'Euler et de Moivre
- Forme trigonométrique d'un nombre complexe
- Transformation de  $a \cos t + b \sin t$  en  $A \cos(t - \Phi)$

## III) Équations algébriques

- Factorisation d'une fonction polynomiale par  $z - a$  si  $P(a) = 0$
- Recherche de racines carrées sous forme algébrique
- Équations du second degré
- Somme et produit des racines
- Racines  $n^{\text{ème}}$  de l'unité et d'un nombre complexe non nul

## IV) Fonction exponentielle

- Exponentielle d'un nombre complexe
- Exponentielle d'une somme
- $\exp(z) = \exp(z')$  ssi  $z \equiv z' [2i\pi]$
- Résolution de  $\exp(z) = w$

## V) Interprétation géométrique des nombres complexes

- Cercles, médiatrices
- Interprétation du module et de l'argument de  $\frac{c-a}{b-a}$
- Traduction de l'alignement et l'orthogonalité
- Similitudes directes
- Interprétation géométrique de la conjugaison

## Calculs algébriques

## I) Sommes et produits

- Sommes et produits télescopiques
- Changement d'indice et regroupement de termes
- Expressions de  $\sum_{k=1}^n k$  et  $\sum_{k=1}^n k^2$
- Somme de termes de suites arithmétiques ou géométriques
- Sommes trigonométriques
- Sommes doubles, produit de sommes finies, sommes triangulaires

## II) Formule du binôme

- Factorielle
- Coefficients binomiaux
- Formule du binôme
- **Reporté à la semaine 6** : Factorisation de  $a^n - b^n$

## Nombres complexes

- $z\bar{z} = |z|^2$
- Inégalité triangulaire (sans le cas d'égalité)
- Formules d'Euler et de Moivre
- Relations coefficients-racines (en degré 2)
- Détermination des racines  $n^{\text{èmes}}$  de l'unité
- Résolution de  $\exp(z) = w$
- Décomposition d'une similitude directe en une translation ou la composée commutative d'une rotation et d'une homothétie de même centre

## Calculs algébriques

- Expression de  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$  ou  $\sum_{k=0}^n u_0 q^k$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  si  $0 \leq k \leq n$  par dénombrement du nombre de  $k$ -arrangements de  $[[1, n]]$
- (Formule du triangle de Pascal)
- Formule du binôme

Démonstrations exigibles

## Nombres complexes

- Si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes, montrer

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$$

et en donner une interprétation géométrique.

- Résoudre  $z^2 = 3 + 4i$ .
- Représenter l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant  $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ .

## Calculs algébriques

- Calculer  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$ .

Exercices préparés