Semaine 23 du 31 mars au 4 avril 2025

Séries numériques

I) Convergence et divergence

- Sommes partielles, convergence, somme
- Linéarité de la somme
- Divergence grossière
- Séries télescopiques : $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge ssi $(u_n)_n$ converge
- Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série géométrique, somme

II) Séries à termes positifs ou nuls

- Convergence ssi la suite des sommes partielles est majorée
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$
- Si $u_n \sim v_n$ avec u_n positives, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
- Si f est décroissante, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$
- Séries de Riemann

III) Théorème des séries alternées

- Théorème spécial, signe et majoration en valeur absolue des restes

IV) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes

- La convergence absolue entraîne la convergence
- Si $v_n \geqslant 0$, $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente

Dém. exigibles

Séries numériques

- Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = 0$
- $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge ssi $(u_n)_n$ converge
- Convergence d'une série à termes positifs si et seulement si ses sommes partielles sont majorées
- Théorème spécial des séries alternées

Exercices préparés

Séries

- À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ et de $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
- Étudier la convergence de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$