Séries numériques

I) Convergence et divergence

II) Séries à termes positifs ou nuls

III) Théorème des séries alternées

IV) Formules de Taylor et fonction exponentielle

- Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange
- Convergence de la série exponentielle avec : $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Matrice d'une application linéaire

I) Matrice d'une application linéaire dans des bases

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs
- Matrice d'une application linéaire
- Isomorphisme d'e.v. de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}$
- Isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n$
- Coordonnées de l'image d'un vecteur
- Lien entre matrices inversibles et isomorphismes

II) Application canoniquement associée à une matrice

- Noyau, image, rang d'une matrice
- Les colonnes engendrent l'image
- Une matrice carrée est inversible ssi son noyau est réduit à $\{0\}$ ssi ses colonnes engendrent $\mathbb{K}^n$ ssi elle est de rang n
- Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \text{Im}(A)$.
- Rang d'un système linéaire
- Système de Cramer

III) Changement de base

- Matrice de passage d'une base à une autre
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage
- Changement de base et coordonnées d'un vecteur
- Changement de base et matrice d'une application

IV) Matrices équivalentes et rang

- Matrices équivalentes ; elles représentent la même application linéaire
- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il est représenté par J_r dans un couple de bases
- Une matrice est de rang r ssi elle est équivalente à J_r

Suite à partir de mardi

- Invariance du rang par transposition
- Rang d'une matrice extraite
- Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites
- Invariance de l'image (resp. du noyau) par opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes)
- Invariance du noyau par opérations élémentaires sur les lignes

V) Matrices semblables et trace

- Matrices semblables ; elles représentent le même endomorphisme
- Exemples de recherche de matrice semblable
- Trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude
- Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$
- La trace d'un projecteur est égale à son rang

Séries numériques

- Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = 0$
- $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi $(u_n)_n$ converge
- Convergence d'une série à termes positifs si et seulement si ses sommes partielles sont majorées
- Théorème spécial des séries alternées
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange

Matrice d'une application linéaire

- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$. Si $x \in E$, $X = \text{Mat}_e(x)$ et $Y = \text{Mat}_f(u(x))$, alors $Y = AX$
- L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence
- Une application linéaire de rang r entre E de dimension p et F de dimension n est représentée par $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Séries

- Étudier la convergence de $\sum \sin\left(\pi \sqrt{n^2 + 1}\right)$.

Matrice d'une application linéaire

- Soit $f(x, y) = (3x + 4y, 4x - 3y)$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.