

Matrice d'une application linéaire

V) Matrices semblables et trace

- Matrices semblables ; elles représentent le même endomorphisme
- Exemples de recherche de matrice semblable
- Trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude
- Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$
- La trace d'un projecteur est égale à son rang

Déterminants

I) Groupe symétrique

- Groupe S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, cycle, transposition
- Décomposition unique en produit commutatif de cycles à supports disjoints
- Décomposition en produit de transpositions
- Signature d'une permutation

II) Formes n -linéaires alternées

- Antisymétrie, effet d'une permutation
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$

III) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

- Existence et unicité du déterminant dans une base
- Expression dans une base en fonction des coordonnées
- $\det_e$ et $\det_{e'}$ sont colinéaires
- $(x_1, \dots, x_n)$ est une base ssi $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$
- Aire dans $\mathbb{R}^2$ et volume dans $\mathbb{R}^3$

IV) Déterminant d'un endomorphisme

- Déterminant d'une composée
- Caractérisation des automorphismes

V) Déterminant d'une matrice carrée

- Déterminant d'un produit, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Caractérisation des matrices inversibles
- $\det$ induit un morphisme de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^*$
- Déterminant d'une transposée
- Effet des opérations élémentaires
- Déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs
- Cofacteur et développement par rapport à une ligne ou une colonne
- $A \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$
- Expression de l'inverse d'une matrice inversible

Matrices

- tr est une forme linéaire non nulle, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$
- La trace d'un projecteur est son rang

Déterminants

- Signature d'un p -cycle
- $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ ssi $(x_1, \dots, x_n)$ est une base
- Formule de développement selon la colonne j (en admettant la formule du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)
- $A \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$

Matrices

- Déterminer la trace de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui à M associe $M^\top$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = O_n$ et soit u l'endomorphisme canoniquement associé. On note $p = \text{rg}(M) = \text{rg}(u)$.

(a) Montrer l'inclusion $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et en déduire $2p \leq n$.

(b) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.