Semaine 28 du 2 au 6 juin 2025

Espérance et variance des variables aléatoires

I) *Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe*

- Espérance, variable aléatoire centrée
- Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire
- Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale
- Formule de transfert
- Si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

II) *Variance d'une variable aléatoire réelle*

- Variance et écart-type, variable aléatoire réduite
- Formule de König-Huygens
- Covariance, variables décorrélées
- Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de v.a. indépendantes
- Variance d'une somme, cas de v.a. décorrélées
- Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale

III) *Inégalités probabilistes*

- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi

Espaces préhilbertiens

I) *Produit scalaire*

- Produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$
- Norme associée, distance
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité
- Identité $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$
- Formule de polarisation associée

II) *Orthogonalité*

- Orthogonal $X^\perp$ d'une partie
- Famille orthogonale, orthonormée
- Théorème de Pythagore
- Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Existence de bases orthonormées en dimension finie
- Expression des coordonnées et du produit scalaire dans une b.o.n.

III) *Projection orthogonale*

- Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie
- Projection orthogonale
- Expression du projeté orthogonal dans une b.o.n.
- Distance $d(x,F)$ réalisée en $p_F(x)$
- Cas d'un hyperplan : $d(x, \mathrm{Vect}(u)^\perp)$

Démonstrations exigibles

Espérance et variance

- Espérance et variance des lois usuelles
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Formule de König-Huygens
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres

Espaces préhilbertiens

- Montrer que les applications $(X,Y) \mapsto X^\intercal Y$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\intercal B)$ et $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ sont des produits scalaires
- Inégalité de Cauchy-Schwarz sans le cas d'égalité
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité
- Tout s.e.v. de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal
- Si $F \oplus F^\perp = E$, la distance $d(x,F)$ est atteinte en un point unique $p_F(x)$.

Exercices préparés

Espérance et variance des variables aléatoires

- Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance. Mêmes questions pour Y.
- Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

  (a) Donner la loi de X. Justifier.

  (b) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.