Semaine 29 du 10 au 13 juin 2025

Espaces préhilbertiens

I) Produit scalaire

- Produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$
- Norme associée, distance
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité
- Identité $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$
- Formule de polarisation associée

II) Orthogonalité

- Orthogonal $X^\perp$ d'une partie
- Famille orthogonale, orthonormée
- Théorème de Pythagore
- Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Existence de bases orthonormées en dimension finie
- Expression des coordonnées et du produit scalaire dans une b.o.n.

III) Projection orthogonale

- Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie
- Projection orthogonale
- Expression du projeté orthogonal dans une b.o.n.
- Distance $d(x,F)$ réalisée en $p_F(x)$
- Cas d'un hyperplan : $d(x, \mathrm{Vect}(u)^\perp)$

IV) Représentation des formes linéaires

- Isomorphisme $a \mapsto (x \mapsto \langle a, x\rangle)$ entre E et $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$

Fonctions de deux variables

I) Fonctions continues

- Surface représentative d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
- Boules, ouverts
- Fonction continue

II) Dérivées partielles

- Dérivées partielles, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
- Développement limité à l'ordre 1
- Présentation informelle du plan tangent
- Gradient

III) Dérivées d'une fonction composée

- Dérivée selon un vecteur
- Règle de la chaîne
- Dérivée d'une composée de fonctions de deux variables
- Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau de f

IV) Extremums

- Extremum local, global, point critique
- Condition nécessaire d'extremum local

Démonstrations exigibles

Espaces préhilbertiens

- Montrer que les applications $(X,Y) \mapsto X^\intercal Y$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\intercal B)$ et $(f,g) \mapsto \int_a^b fg$ sont des produits scalaires
- Inégalité de Cauchy-Schwarz sans le cas d'égalité
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité
- Tout s.e.v. de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal
- Si $F \oplus F^\perp = E$, la distance $d(x,F)$ est atteinte en un point unique $p_F(x)$.
- Isomorphisme $a \mapsto (x \mapsto \langle x, a\rangle)$ entre E et $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$

Fonctions de deux variables

- Expression du développement limité à l'ordre 1 à l'aide du gradient
- Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau : si $t \mapsto f(\gamma(t))$ est constante, alors $\nabla f(\gamma(t))$ et $\gamma'(t)$ sont orthogonaux
- Condition suffisante d'extremum local

Exercices préparés

Espaces préhilbertiens réels

- Soient e une base orthonormale d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme vérifiant $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ pour tout $(x,y) \in E^2$. Montrer que la matrice de f dans la base e est symétrique et que le noyau et l'image de f sont supplémentaires orthogonaux.

Fonction de deux variables

- Justifier que $(x,y) \mapsto \frac{x^3}{x^2+y^2}$ se prolonge en une fonction continue en $(0,0)$ mais pas $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$.