Semaine 5 du 13 au 17 octobre 2025

Fonctions de variable réelle

I) *Généralités sur les fonctions*

- Ensemble de définition ; somme, produit, composée
- Représentation graphique dans le cas d'une fonction à valeurs réelles
- Action sur le graphe de transformations du type $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$
- Parité, imparité, périodicité
- Monotonie
- Fonctions majorées, minorées, bornées
- f bornée ssi $|f|$ majorée

II) *Dérivation*

- Définition par taux d'accroissement
- Interprétation géométrique, tangente
- Dérivée d'une fonction à valeurs complexes (par parties réelle et imaginaire)
- Sans démonstration : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une fonction réciproque
- Dérivée de $\exp \circ \phi$ si $\phi : I \to \mathbb{C}$
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (seulement la définition)

III) *Études de fonctions*

- Caractérisation des fonctions constantes et (strictement) (dé)croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle
- Recherche d'extremum ou preuve d'inégalité par étude d'une fonction auxiliaire
- Branches infinies (branche parabolique et asymptote horizontale, verticale ou oblique)
- Convexité pour une fonction dérivable

Fonctions usuelles

I) *Fonctions trigonométriques réciproques*

- Dérivée, variations, représentation graphique de Arcsin, Arccos et Arctan
- $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x) = \pm\frac{\pi}{2}$.

II) *Fonctions exponentielle, logarithme et puissance*

- Exponentielle (admis : unique solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$)
- Logarithme népérien (défini comme sa réciproque).
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- Variations, limites et convexité de exp et ln
- $\exp(x) \leqslant 1 + x$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$
- Fonctions puissances, règles de calcul, tracé
- Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle

III) *À partir de mardi : fonctions trigonométriques hyperboliques*

- Fonctions ch, sh et th : variations, limites, tracé
- Formule $\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y) = 1$

Démonstrations exigibles

Fonctions d'une variable réelle

- f est bornée ssi $|f|$ est majorée
- Dérivée de $\exp \circ \phi$ si $\phi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable

Fonctions usuelles

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\exp(x) \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$
- Justifier que $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est une bijection et tracer les courbes représentatives de tan et Arctan
- Dérivées de Arccos, Arcsin, Arctan

Exercices

Fonctions de variable réelle

- La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
- On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall\, (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Justifier que les fonctions satisfaisant ces conditions vérifient $f(1) = 0$ et il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f'(t) = \frac{k}{t}$. Conclure.

- Soit $f(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(2x)}$. Déterminer le domaine de définition D_f. Montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cap D_f$. Tracer la courbe représentative de f.

Fonctions usuelles

- $\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \pm\frac{\pi}{2}$