Semaine 7 du 10 au 14 novembre 2025

Équations différentielles linéaires

I) Équations différentielles du premier ordre

- Solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$
- Principe de superposition
- Forme des solutions de l'équation complète
- Méthode de variation de la constante
- Problème de Cauchy, théorème de Cauchy

II) Équations différentielles du second ordre

- Solutions des équations homogènes à coefficients constants de fonction inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$
- Principe de superposition
- Forme des solutions de l'équation complète
- Recherche d'une solution particulière pour un second membre polynomial, exponentiel, ou de la forme $B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$ (l'équation homogène étant à coefficients constants)
- Problème de Cauchy, théorème de Cauchy
- Exemples de changement de variable

Démonstrations exigibles

Équations différentielles linéaire

- Solutions de l'équation homogène $y'(x) = a(x)y(x)$
- Principe de superposition (pour une équation du premier ou du second ordre)
- Si y_p est une solution particulière de l'équation complète (du premier ou du second ordre), l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y_p + y_h$ avec y_h solution de l'équation homogène.

Exercices préparés

Intégrales et primitives

- Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire une expression de I_{2p} pour tout p dans $\mathbb{N}$.

Équations différentielles linéaires

- Résoudre $(x\ln x)y'(x) - y(x) = 2x^2(\ln x)^2$ sur $]0,1[$.
- Résoudre $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t^2 - 5 + \mathrm{e}^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+t^2)^2x''(t) + 2(t-1)(t^2+1)x'(t) + x(t) = 0$ à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{Arctan}(t)$.