

TP (S2) 2

Preuves & Complexité

1 **Preuve d'un programme**2 **Complexité d'un algorithme**

Objectifs

- Savoir prouver la terminaison d'une boucle.
- Savoir prouver un programme simple en utilisant un invariant de boucle.
- Savoir calculer la complexité temporelle et/ou spatiale d'un programme.

1

PREUVE D'UN PROGRAMME

Exercice 1 Terminaison de la recherche dichotomique [Sol 1] On rappelle la fonction de recherche dichotomique d'un élément dans une liste triée :

```
def present_dicho(t:[int], v:int)->bool:
    '''
    □ Teste la présence de l'entier 'v' dans la liste 't', par méthode \
    ↪ dichotomique
    □ '''
    d = 0
    f = len(t)
    trouve = False
    # précondition (P) : t est une liste triée par ordre \
    ↪ croissant
    while not trouve and d < f:
        m = (d + f) // 2
        if t[m] == v:
            trouve = True
        elif t[m] < v:
```

```
        d = m + 1 #Décalage à droite
    else:
        f = m #Decalage à gauche
    # postcondition (Q) : trouve vaut True si 'v' appartient à \
    ↪ 't', False sinon.
    return trouve
```

Notons d_k et f_k le contenu des variables d et f à la fin de l'itération k , et ℓ_k de la tranche $t[d_k : f_k]$. On a la relation $f_k = d_k + \ell_k$. On suppose par l'absurde que la boucle ne termine jamais.

1. Montrer que ℓ_k est au moins divisé par deux pour chaque tour de boucle. En déduire que l'algorithme termine.
2. On a prouvé dans le TP précédent l'invariant suivant : $\mathcal{P}(k)$ « $(v \notin t)$ ou $(v \in t[d_k : f_k])$ ». En déduire que l'algorithme est correct.

Exercice 2 Le tri par sélection [Sol 2] Pour mettre en oeuvre ce tri nous aurons besoin de la fonction suivante :

```
def pos_max(L: list)->int:
    """ Renvoie l'indice de la dernière occurrence du maximum de \
    ↪ L
        où L est une liste de nombres supposée non vide """
    m, p, n = L[0], 0, len(L) #initialisation avec le premier \
    ↪ élément
    for i in range(1, n): # on parcourt les éléments suivants
        if L[i] >= m: # si on trouve un élément supérieur ou \
        ↪ égal
            m, p = L[i], i # on met à jour nos variables
    return p
```

1. Proposer un invariant pour la boucle **for** et faire la preuve de cette fonction.
2. Le principe de ce tri est le suivant :
 - Première étape : on trouve le plus grand élément de L et on l'échange avec le dernier élément de L.
 - Deuxième étape : on trouve le plus grand élément parmi les $n - 1$ premiers éléments de L et on l'échange avec l'avant-dernier élément de L.
 - etc.
- 2.1) Écrire la fonction `tri_select(L: list) -> None` qui réalise à l'aide de la fonction précédente le tri par sélection en place de la liste L.
- 2.2) Faire la preuve de cette fonction.

Exercice 3 Méthode dichotomique continue [Sol 3] On considère la fonction suivante qui met en œuvre la méthode dichotomique pour la résolution à ϵ près d'une équation $f(x) = 0$ possédant une solution unique dans un intervalle $[a; b]$:

```
def dichotomie(f: Callable, a: float, b: float, epsilon: \
    float) -> float:
    """ Calcule une valeur approchée à epsilon près de l'unique
        solution de f(x)=0 dans l'intervalle [a;b],
        pré-condition : ... """
    fa = f(a)
    while b-a > 2*epsilon:
        milieu = (a+b)/2
        fm = f(milieu)
        if fa*fm <= 0:
            b = milieu
        else:
            a = milieu
            fa = fm
    return (a+b)/2
```

1. Compléter la pré-condition dans la docstring et commenter le code.
2. Établir la terminaison de la boucle **while**.
3. Proposer un invariant de boucle et faire la preuve.
4. Proposer une version récursive de cette fonction.

Exercice 4 Fonction d'ACKERMANN [Sol 4] Cette fonction est définie sur \mathbb{N}^2 récursivement comme ceci :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{si } m = 0, \\ A(m - 1, 1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0, \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0. \end{cases}$$

1. Écrire la fonction `A(m: int, n: int) -> int` qui renvoie la valeur de $A(m, n)$, et la tester.
2. Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, l'appel à $A(m, n)$ se termine et renvoie un naturel.

2

COMPLEXITÉ D'UN ALGORITHME

Exercice 5 Recherche d'un maximum [Sol 5] Écrire une fonction `IndiceMaxListe(L: list) -> int` qui renvoie le plus petit indice de l'élément maximal d'une la liste L de flottants. Quelle est sa complexité temporelle?

Exercice 6 Fonction mystère [Sol 6] On considère la fonction suivante :

```
def Mystere(L: list) -> bool :
    lg = len(L)
    doublon = False
    for i in range(lg-1) :
        for j in range(i+1, lg):
            if L[j] == L[i] :
                doublon = True
    return doublon
```

Calculer sa complexité.

Exercice 7 Calculs de complexités [Sol 7] Évaluer la complexité exacte de chacune des fonctions suivantes puis donner sa complexité asymptotique.

```

1. for i in range(5, n-5):
    for j in range(i-5, i+5):
        x += 1
2. for i in range(n):
    for j in range(i):
        for k in range(j):
            x += 1

```

Exercice 8 Complexité de l'exponentiation rapide [Sol 8] On reprend l'algorithme d'exponentiation rapide pour calculer x^n qui a été présenté dans le cours :

```

def expR(x: float, n: int) -> float :
    """Renvoie x^n pour x réel et n entier naturel."""
    X = x
    N = n
    R = 1
    while N != 0 :
        if N%2 == 0 :
            N = N//2
        else :
            R = R*X
            N = (N-1)//2
    X = X*X
    return R

```

1. Compter le nombre de multiplications effectuées ($X * X$ et $R * X$) dans l'algorithme d'exponentiation rapide lorsque $n = 2^p$ (on néglige le temps d'exécution des autres opérations élémentaires devant celui de la multiplication).
2. Lorsque $2^p \leq n < 2^{p+1}$, donner un encadrement du nombre de multiplications puis en déduire la complexité asymptotique.
3. **[Meilleur encadrement]** On peut obtenir un meilleur encadrement en décomposant n en binaire. Plus précisément, on l'écrit sous la forme :

$$n = 2^{p_1} + \dots + 2^{p_k}, \quad \text{avec : } 0 \leq p_1 < \dots < p_k \text{ entiers tels que } 2^{p_k} \leq n < 2^{p_k+1}.$$
 - 3.1) Montrer, par récurrence sur k , que le nombre de multiplications est $p_k + k + 1$.
 - 3.2) En déduire que le nombre $C(n)$ de multiplications vérifie :

$$\log_2(n) < C(n) \leq 2\log_2(n) + 2. \quad (\text{On pourra remarquer en justifiant que } k \leq p_k + 1)$$

Exercice 9 Suite de FIBONACCI [Sol 9] On s'intéresse dans cet exercice à la suite de FIBONACCI dont on rappelle la définition :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Écrire une fonction itérative Fibo1 à qui on fournit un entier naturel n et qui renvoie F_n . Calculer la complexité temporelle de cette fonction.
2. Proposer une fonction récursive « naturelle » Fibo2 qui renvoie le même résultat que Fibo1 et calculer sa complexité temporelle.
3. On propose la fonction récursive suivante :

```

def Fibo3(a, b, n):
    if n == 0:
        return a
    else:
        return Fibo3(b, a+b, n-1)

```

Déterminer la signature et la docstring de cette fonction, et expliquer comment on pourrait l'utiliser pour calculer F_n . Calculer sa complexité.

Solution 1

1. Discutons suivant la parité de ℓ_k :

- Si ℓ_k est pair, notons $\ell_k = 2p$ avec p entier, ce qui donne $f_k = d_k + 2p$.

L'étape $k+1$ construit l'indice milieu $m_{k+1} = \left\lfloor \frac{d_k + f_k}{2} \right\rfloor = d_k + p$.

En cas de décalage à gauche, on pose $d_{k+1} = d_k$ et $f_{k+1} = m_{k+1} = d_k + p$ donc

$$\ell_{k+1} = f_{k+1} - d_{k+1} = p = \ell_k / 2.$$

En cas de décalage à droite, on pose $d_{k+1} = m_{k+1} + 1 = d_k + p + 1$ et $f_{k+1} = f_k$ donc $\ell_{k+1} = f_{k+1} - d_{k+1} = p - 1 < \ell_k / 2$.

Dans ces deux cas, on a bien $\ell_{k+1} \leq \frac{\ell_k}{2}$.

- Si ℓ_k est impair, notons $\ell_k = 2p + 1$ avec p entier, donc $f_k = d_k + 2p + 1$.

L'indice milieu est encore $m_{k+1} = \left\lfloor \frac{d_k + f_k}{2} \right\rfloor = d_k + p$.

Les décalages à gauche et à droite donnent tous deux $\ell_{k+1} = p \leq \frac{\ell_k}{2}$.

La suite ℓ_k est donc une suite d'entiers strictement décroissante. Il existe donc un rang k_0 tel que $\ell_{k_0} < 1$. Or, dans l'hypothèse où la boucle ne termine jamais, on a $d_k < f_k$, soit $\ell_k > 0$. ℓ_k étant entier, on ne peut avoir à la fois $\ell_{k_0} < 1$ et $\ell_{k_0} > 0$. L'hypothèse de non terminaison est donc fautive : la boucle s'arrête.

2. Supposons maintenant que l'on sorte de la boucle **while**, on a donc la proposition suivante « trouve == **True** $\vee (d \geq f)$ » qui est vérifiée, on a aussi l'invariant qui est vérifié. Distinguons de nouveau deux cas :

1. Lorsque t ne contient pas v , la variable t trouve ne peut donc jamais être modifiée, comme elle est initialisée à **False**, elle aura donc encore cette valeur en sortie de boucle, et la fonction renvoie le résultat attendu.
2. Lorsque t contient v , si en sortie de boucle on avait ($d \geq f$), alors on aurait que $t[d : f]$ est une liste vide, or l'invariant nous dit que cette liste contient v , ce qui est absurde, par conséquent t trouve a la valeur **True**.

Dans les deux cas, la valeur de t trouve indique bien la présence ou non de v dans t (c'est la postcondition).

Solution 2

1. On peut proposer l'invariant suivant $P(k)$: « $m_k = L[p_k] = \max(L[0 : k + 1])$ ».

Initialisation. $P(0)$ est vraie, puisque $m_0 = L[0] = L[0 : 1]$ d'après l'initialisation.

Hérédité. Supposons $P(k)$ vraie pour un entier k avec $k < n - 1$, il y a donc une itération $k + 1$, la valeur de i à l'itération $k + 1$ est $i_{k+1} = k + 1$, on effectue le test.

- si $L[k+1] \geq m_k$ alors $m_{k+1} = L[k+1]$ et $p_{k+1} = k + 1$, compte-tenu de l'hypothèse de récurrence on a bien $m_{k+1} = \max(L[0 : k + 2]) = L[p_{k+1}]$,
- et si $L[k+1] < m_k$, alors $m_{k+1} = m_k$ et $p_{k+1} = p_k$, et il est clair, compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, que $m_{k+1} = \max(L[0 : k + 2]) = L[p_{k+1}]$.

Après la dernière itération (numéro $n - 1$), on a $P(n - 1)$ c'est à dire $m_{n-1} = L[p_{n-1}] = \max(L[0 : n])$, mais $L[0 : n] = L$, donc la valeur p_{n-1} renvoyée est bien un indice où se trouve le maximum de L (la dernière occurrence du maximum à cause de l'inégalité large dans le test).

2. 2.1) La fonction :

```
def tri_select(L: list) -> None:
    """ Réalise le tri par sélection en place de la liste L,
        où L est une liste de nombres """
    n = len(L)
    # la première étape se fait sur la liste en entier: L[:n]
    # la deuxième sur ses n-1 premiers éléments: L[:n-1]
    # la dernière sur ses deux premiers éléments: L[:n-2]
    for i in range(n-1):
        p = pos_max(L[:n-i])
        L[p], L[n-i-1] = L[n-i-1], L[p]
```

2.2) On remarque que si la liste L est de longueur au plus 1, la fonction ne fait rien, ce qui est attendu. On suppose maintenant que l'on a une liste L de longueur $n \geq 2$.

La boucle **for** est exécutée $n - 1$ fois et se termine forcément. On peut proposer l'invariant suivant pour la boucle $P(k)$: « la liste $L[n - k : n]$ est triée dans l'ordre croissant et tous ses éléments sont supérieurs ou égaux à ceux de la liste $L[0 : n - k]$ ».

Initialisation. $P(0)$ est vraie car $L[n : n]$ est vide (une liste vide est triée).

Hérédité. Supposons $P(k)$ vraie avec $k < n - 1$, il y a donc une itération $k + 1$, la valeur de i à l'itération $k + 1$ est $i_{k+1} = k$, l'élément maximal de $L[0 : n - k]$ est échangé et se retrouve alors à l'indice $n - i - 1 = n - k - 1$, par hypothèse de récurrence cet élément est inférieur ou égal à tous ceux de $L[n - k : n]$ (qui

eux sont dans l'ordre croissant), donc la liste $L[n-k-1:n]$ est triée dans l'ordre croissant, de plus, le plus petit élément de cette liste est $L[n-k-1]$ qui était l'élément maximal de $L[0:n-k]$, par conséquent les éléments de $L[0:n-k-1]$ sont tous inférieurs ou égaux à $L[n-k-1]$ et donc inférieurs ou égaux à tous ceux de $L[n-k-1:n]$, donc $P(k+1)$ est vraie.

Correction. À l'issue de l'itération $n-1$ (dernière itération) l'invariant dit que la liste $L[n-(n-1):n]$, c'est à dire $L[1:n]$, est triée dans l'ordre croissant, et ses éléments sont supérieurs ou égaux à ceux de $L[:n-(n-1)]$ c'est à dire $L[0:1]$ (qui ne contient que $L[0]$), par conséquent la liste L est bien triée dans l'ordre croissant.

Solution 3

1. Pré-condition : « $\epsilon > 0$, $a < b$, f est continue, $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ et il y a une unique solution sur $[a, b]$ ». L'unicité de la solution est garantie lorsque f est strictement monotone sur $[a, b]$.
2. On a $a_0 = a$, $b_0 = b$, on montre ensuite par récurrence que $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$, on a donc une suite réelle de limite nulle, il existe un indice k tel que $b_k - a_k \leq \epsilon$, la boucle s'arrête donc.
3. Lorsque la précondition est remplie, on sait qu'il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On propose alors l'invariant $P(k)$: « $f(a_k) = f(a_k)$, $a \leq a_k \leq c \leq b_k \leq b$ et $f(a_k) \times f(b_k) \leq 0$ ».

Initialisation. $P(0)$ est vraie (on suppose la précondition vérifiée).

Hérédité. Si $P(k)$ est vraie et s'il y a une itération $k+1$: la variable `milieu` contient $\frac{a_k + b_k}{2}$ qui est le milieu de l'intervalle $[a_k, b_k]$, le test a deux issues possibles :

- Si $f(a) \cdot f(m) \leq 0$ alors $f(a_k)$ et $f(m)$ sont de signes contraires donc f s'annule entre a_k et le milieu (c'est forcément en c par unicité), dans ce cas on $b_{k+1} = \text{milieu}$ et $a_{k+1} = a_k$, donc $f(a_{k+1}) = f(a_k) = f(a_k)$, $a \leq a_{k+1} \leq c \leq b_{k+1} \leq b$ et $f(a_{k+1}) \times f(b_{k+1}) \leq 0$.
- Si $f(a) \cdot f(m) > 0$ alors $f(a_k)$ et $f(m)$ sont de même signe, donc par hypothèse de récurrence $f(m)$ et $f(b_k)$ sont de signes contraires, f s'annule entre le milieu et b_k (c'est forcément en c par unicité), dans ce cas on $b_{k+1} = b_k$, $a_{k+1} = \text{milieu}$, et $f(a_{k+1}) = f(\text{milieu}) = f(a_{k+1})$, $a \leq a_{k+1} \leq c \leq b_{k+1} \leq b$ et $f(a_{k+1}) \times f(b_{k+1}) = f(\text{milieu}) \times f(b_k) \leq 0$.

Dans tous les cas $P(k+1)$ est vérifiée, ce qui achève la récurrence.

Correction. Soit n le numéro de la dernière itération, $P(n)$ est vraie, donc $a_n \leq c \leq b_n$ et puisqu'il n'y a pas d'itération $n+1$, on a $b_n - a_n \leq 2\epsilon$, ce qui entraîne que la distance entre c et $\frac{a_n + b_n}{2}$ (qui est le résultat renvoyé) est inférieure ou égale à ϵ .

4. Version récursive :

```
def dichorec(f: Callable, a: float, b: float, epsilon: \
    -> float) -> float:
    """ Calcule une valeur approchée à epsilon près de l'unique
        solution de f(x)=0 dans l'intervalle [a;b],
        pré-condition : epsilon>0, a<b, f continue, \
        -> f(a)*f(b)<=0,
                                unique solution """
    if b-a <= 2*epsilon:
        return (a+b)/2
    else:
        milieu = (a+b)/2
        if f(a)*f(milieu) <= 0:
            return dichorec(f,a,milieu,epsilon)
        else:
            return dichorec(f,milieu,b,epsilon)
```

Solution 4

1. La fonction :

```
def A(m: int, n: int) -> int :
    """ Renvoie la valeur de A(m,n) (fonction d'Ackermann)
        m et n sont des naturels (pré-condition) """
    if m == 0:
        return n+1
    elif n == 0:
        return A(m-1, 1)
    else:
        return A(m-1, A(m, n-1))

>>> A(3, 1)
13
```

Essayez de faire grandir les paramètres; vous verrez que l'on atteint très vite la taille limite de la pile de récursivité.

2. On montre pour tout m , $P(m)$: « $\forall n \in \mathbb{N}$, l'appel à $A(m, n)$ se termine et renvoie un naturel ».

Initialisation. C'est vrai au rang $m = 0$, d'après le cas terminal.

Hérédité. Supposons $P(m)$ pour un entier m , on montre alors $P(m+1)$ en faisant une récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, $A(m+1, 0)$ se termine et renvoie un naturel.
- Supposons pour un entier n que $A(m+1, n)$ se termine et renvoie un naturel, alors pour calculer $A(m+1, n+1)$, il faut calculer $A(m, A(m+1, n))$, or le nombre $p = A(m+1, n)$ est calculable et c'est un naturel (hypothèse de récurrence sur n), et donc $A(m, p)$ se termine et renvoie un naturel (hypothèse de récurrence sur m). Donc $P(m+1)$ est vrai.

Ainsi, par principe de récurrence (sur m), $P(m)$ est vraie pour tout m , d'où le résultat.

Solution 5 Fonction IndiceMaxListe(L).

```
def IndiceMaxListe(L:list)->int :
    """ Calcule le plus petit indice de l'élément maximal
        d'une la liste L de flottants """
    lg = len(L)
    maxi = L[0]
    idx = 0
    for i in range(lg) :
        if L[i] > maxi:
            maxi = L[i]
            idx = i
    return idx
```

Si on note n la longueur de la liste, alors, l'algorithme est de complexité asymptotique $O(n)$.

Solution 6 Notons n la longueur de la liste. Il y a $n-1$ passages dans la boucle en i et pour chaque $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $n-i-1$ passages dans la boucle en j . À chaque passage dans cette boucle en j , il y a au plus deux opérations élémentaires (un test et une affectation) et au mieux une seule opération élémentaire (seulement un test). On obtient donc :

$$C_{\text{pire}}(n) = 2 + \sum_{i=0}^{n-2} 2(n-i-1) = 2 + n(n-1)$$

$$C_{\text{meilleur}}(n) = 2 + \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1) = 2 + \frac{n(n-1)}{2}$$

L'algorithme est de complexité asymptotique $O(n^2)$.

Solution 7

1.

$$C(n) = \sum_{i=5}^{n-6} \sum_{j=i-5}^{i+4} 2 = 2 \sum_{i=5}^{n-6} (i+4 - (i-5) + 1) = 20(n-10)$$

d'où une complexité asymptotique $O(n)$.

2.

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{j-1} 2 = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i-1} j = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

d'où une complexité asymptotique $O(n^3)$.

Solution 8

1. La variable N est divisée par 2 à chaque passage dans la boucle, donc, $p+1$ fois et donc X est multiplié avec lui même $p+1$ fois, mais il y a aussi une autre multiplication quand $N = 1$ ($R=R \cdot X$), ce qui fait $p+2$ multiplications en tout. La méthode naïve impose quant à elle $2^p - 1$ multiplications!
2. On a $N_{i+1} = \left\lfloor \frac{N_i}{2} \right\rfloor$ et $N_0 = n$, donc $2^p \leq N_0 < 2^{p+1}$, on en déduit par récurrence sur i que $2^{p-i} \leq N_i < 2^{p-i+1}$ (faite dans le cours) puis que $N_{p+1} = 0$ et donc comme dans la question précédente, le nombre d'itérations est $p+1$, à chaque itération on a 1 ou 2 multiplications, donc $p+1 \leq C(n) \leq 2p+2$ où $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$, et donc $\log_2(n) + 1 \leq C(n) \leq 2\log_2(n) + 2$.
3. 3.1) Faisons une récurrence sur k .

Initialisation. La formule est vraie au rang $k = 1$.

Hérédité. Supposons la vraie au rang k et soit $n = 2^{p_1} + \dots + 2^{p_{k+1}}$ avec $0 \leq p_1 < \dots < p_{k+1}$ des entiers.

- N va d'abord être divisé par 2, p_1 fois, ce qui va donner p_1 fois le produit $X * X$.
- On a alors $N = 1 + 2^{p_2-p_1} + \dots + 2^{p_{k+1}-p_1}$ qui est impair, et on va alors avoir deux multiplications supplémentaires ($X = X * X$ et $R = R * X$).

- On obtient alors $N = 2^{p_2-p_1-1} + \dots + 2^{p_{k+1}-p_1-1}$. Par hypothèse de récurrence, il y restera $p_{k+1} - p_1 - 1 + k + 1$ produits, ce qui fait en tout : $p_1 + 2 + p_{k+1} - p_1 - 1 + k + 1 = p_{k+1} + k + 2$: c'est la formule au rang $k + 1$.

3.2) D'une part, on remarque qu'il y a $k - 1$ entiers distincts non nuls p_2, \dots, p_k (on ne compte pas p_1 car on peut avoir $p_1 = 0$) dans l'intervalle $[0, p_k]$ donc $\boxed{p_k \geq k - 1}$.

D'autre part, on a $p_k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$, d'où l'encadrement $p_k \leq \log_2(n) < p_k + 1$. Il en résulte :

$$\log_2(n) < p_k + 1 \leq \underbrace{p_k + k + 1}_{=C(n)} \leq 2p_k + 2 \leq 2\log_2(n) + 2$$

La borne de droite peut être atteinte, lorsque $n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k$.

Solution 9

```
1. def Fibol(n:int)->int :
    U, V = 0, 1
    for _ in range(n):
        U, V = V, U + V
    return U
```

On trouve $C(n) = 2 + n \times 3 = \boxed{O(n)}$.

```
2. def Fibo2(n:int)->int:
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return Fibo2(n-1) + Fibo2(n-2)
```

On trouve $C(0) = 1$ (un test), $C(1) = 2$ (2 tests) et :

$$\forall n \geq 2, \quad C(n) = 2 + C(n-1) + C(n-2) + 1 = C(n-1) + C(n-2) + 3,$$

en posant $u_n = C(n) + 3$, la suite u est une suite de FIBONACCI avec $u_0 = 4$ et $u_1 = 5$, on en déduit l'expression de u_n , puis :

$$C(n) = \left(2 + 3 \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(2 - 3 \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 3 = \boxed{O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

On obtient donc une complexité exponentielle!

```
3. def Fibo3(a:float,b:float,n:int)->float:
    """
    Détermine le terme F_{n} d'une suite de Fibonacci ayant \
    ↪ pour a pour terme d'indice 0 et b pour terme d'indice 1

    Parameters
    -----
    a : float
    b : float
    n : int

    Returns
    -----
    float
        la valeur du réel F_{n}

    """
    if n == 0:
        return a
    else:
        return Fibo3(b, a+b, n-1)
```

En appelant $\text{Fibo3}(0, 1, n)$, on obtient le terme F_n de la suite initiale de FIBONACCI. En effet, on montrerait par récurrence double, que pour tout $n \geq 1$, $F_n = G_{n-1}$ où (G_n) est la suite définie par :

$$G_0 = b, \quad G_1 = a + b, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad G_{n+2} = G_n + G_{n+1}.$$

On a alors une nouvelle fonction, qui est de complexité bien meilleure. Puisqu'on trouve $C(0) = 1$ (1 test), et $C(n) = C(n-1) + 2$ (un test et une addition) d'où $C(n) = 2n + 1 = \boxed{O(n)}$.