

Semaine 10 du 1^{er} au 5 décembre 2025

Suites numériques

I) Généralités

- Modes de définition : explicite, implicite, par récurrence
- Suites réelles majorées, minorées, bornées, monotones, stationnaires
- Suites complexes bornées, stationnaires

II) Limite d'une suite réelle ou complexe

- Limite d'une suite, unicité
- Toute suite convergente est bornée

III) Résultats spécifiques aux suites réelles

- Conservation des inégalités larges par passage à la limite
- Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$)
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes
- Si u_n tend vers $\ell > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang

IV) Opérations sur les limites

- Combinaison linéaire, produit, quotient
- Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

V) Suites extraites

- Toute suite extraite d'une suite de limite ℓ a pour limite ℓ
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite, alors (u_n) a la même limite
- Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par dichotomie

VI) Caractérisations séquentielles

- Caractérisation séquentielle de la densité
- Densité de \mathbb{D} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R}
- Si X est une partie de \mathbb{R} non vide majorée, il existe une suite d'éléments de X convergeant vers $\sup X$.
- Cas de la borne inférieure

VII) Suites récurrentes linéaires

- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

VIII) Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

- Intervalle stable
- Utilisation du signe de $f(x) - x$ ou de la croissance de f pour étudier la monotonie.
- Si u converge vers ℓ et f est continue, alors $f(\ell) = \ell$

Suites numériques

- Théorème de limite par encadrement
- Théorème de la limite monotone
- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$
- Théorème des suites adjacentes
- Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$, alors $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ
- Théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{C} en admettant le résultat dans \mathbb{R}
- Existence d'une suite d'éléments de X convergeant vers $\sup X$ lorsque X est non vide majoré

Relation d'ordre sur \mathbb{R}

- Si A est une partie non vide de \mathbb{R} et x un réel justifier l'existence de

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

Montrer, pour tous réels x et y : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$

Suites numériques

- *Théorème de Cesàro.* Montrer que si (u_n) converge vers ℓ , alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ tend vers ℓ .

Exercices préparés