

## Suites numériques

### I) Généralités

- Modes de définition : explicite, implicite, par récurrence
- Suites réelles majorées, minorées, bornées, monotones, stationnaires
- Suites complexes bornées, stationnaires

### II) Limite d'une suite réelle ou complexe

- Limite d'une suite, unicité
- Toute suite convergente est bornée

### III) Résultats spécifiques aux suites réelles

- Conservation des inégalités larges par passage à la limite
- Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite  $+\infty$ ), par majoration (limite  $-\infty$ )
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes
- Si  $u_n$  tend vers  $\ell > m$ , alors  $u_n > m$  à partir d'un certain rang

### IV) Opérations sur les limites

- Combinaison linéaire, produit, quotient
- Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle

### V) Suites extraites

- Toute suite extraite d'une suite de limite  $\ell$  a pour limite  $\ell$
- Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont la même limite, alors  $(u_n)$  a la même limite
- Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par dichotomie

### VI) Caractérisations séquentielles

- Caractérisation séquentielle de la densité
- Densité de  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$
- Si  $X$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide majorée, il existe une suite d'éléments de  $X$  convergeant vers  $\sup X$ .
- Cas de la borne inférieure

### VII) Suites récurrentes linéaires

- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

### VIII) Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

- Intervalle stable
- Utilisation du signe de  $f(x) - x$  ou de la croissance de  $f$  pour étudier la monotonie.
- Si  $u$  converge vers  $\ell$  et  $f$  est continue, alors  $f(\ell) = \ell$

### Suites numériques

- Démonstrations exigibles**
- Théorème de limite par encadrement
  - Théorème de la limite monotone
  - Toute suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$
  - Théorème des suites adjacentes
  - Si  $\lim u_n = \ell$  et  $\lim v_n = \ell'$ , alors  $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$
  - Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers  $\ell$ , alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$
  - Théorème de Bolzano-Weierstrass dans  $\mathbb{C}$  en admettant le résultat dans  $\mathbb{R}$
  - Existence d'une suite d'éléments de  $X$  convergeant vers  $\sup X$  lorsque  $X$  est non vide majoré

### Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

- Si  $A$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $x$  un réel justifier l'existence de

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

Montrer, pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$

### Suites numériques

- Exercices préparés**
- *Théorème de Cesàro.* Montrer que si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$  tend vers  $\ell$ .