Semaine 11 du 8 au 12 décembre 2025

Groupes et anneaux

I) Loi de composition interne

- Associativité, commutativité
- Élément neutre, inversibilité
- Distributivité, partie stable

II) Structure de groupe

- Groupe des permutations d'un ensemble, groupe produit
- Sous-groupe
- Morphisme de groupes
- Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme
- Image et noyau

III) Structure d'anneau et de corps

- Calcul dans un anneau
- Groupe des inversibles
- Anneau intègre, corps
- Sous-anneau
- Morphisme d'anneau

Démonstrations exigibles

Groupes et anneaux

- L'image d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.
- Un morphisme de groupes est injectif ssi son noyau est réduit à l'élément neutre.
- L'ensemble $\mathcal{U}(A) = A^\times$ des éléments inversibles d'un anneau est un groupe multiplicatif.
- Formule du binôme si a et b commutent.
- Factorisation de $a^n - b^n$ si a et b commutent.

Ex. prép.

Groupes et anneaux

- Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$