

Semaine 12 du 15 au 19 décembre 2025

Limites et continuité d'une fonction de variable réelle

I) Limite finie en un point

- Limite finie ou infinie en a d'une fonction à valeurs réelles ou complexes
- Unicité de la limite
- Si f définie en a admet une limite en a , cette limite est $f(a)$
- Si f possède une limite finie en a elle est bornée au voisinage de a
- Limite à gauche et à droite
- Caractérisation séquentielle

II) Opérations sur les limites, inégalités

- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition
- Passage à la limite d'une inégalité large
- Conservation du signe sur un voisinage pour une limite non nulle

III) Théorèmes d'existence de limites

- Existence d'une limite par encadrement, minoration, majoration
- Théorème de la limite monotone

IV) Continuité en un point

- Caractérisation séquentielle
- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition

V) Continuité sur un intervalle

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Toute fonction continue et strictement décroissante sur $[a, b[$ réalise une bijection de $[a, b[$ sur $\left[\lim_{b^-} f, f(a) \right]$ (et variantes)
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Théorème des bornes atteintes

Démonstrations

Limites

- Caractérisation séquentielle de la limite

Continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes atteintes

Exercices préparés

Limites et continuité

- La fonction $x \mapsto x \cos(x) - x^3 \sin(x)$ admet-elle une limite en $+\infty$?
- Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodiques et admettant une limite en $+\infty$.
- Montrer que si deux fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{C} vérifient $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ alors $f = g$.