

## Limites et continuité d'une fonction de variable réelle

### I) Limite finie en un point

- Limite finie ou infinie en  $a$  d'une fonction à valeurs réelles ou complexes
- Unicité de la limite
- Si  $f$  définie en  $a$  admet une limite en  $a$ , cette limite est  $f(a)$
- Si  $f$  possède une limite finie en  $a$  elle est bornée au voisinage de  $a$
- Limite à gauche et à droite
- Caractérisation séquentielle

### II) Opérations sur les limites, inégalités

- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition
- Passage à la limite d'une inégalité large
- Conservation du signe sur un voisinage pour une limite non nulle

### III) Théorèmes d'existence de limites

- Existence d'une limite par encadrement, minoration, majoration
- Théorème de la limite monotone

### IV) Continuité en un point

- Caractérisation séquentielle
- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition

### V) Continuité sur un intervalle

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Toute fonction continue et strictement décroissante sur  $[a, b[$  réalise une bijection de  $[a, b[$  sur  $\left] \lim_{b^-} f, f(a) \right]$  (et variantes)
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Théorème des bornes atteintes

## Démonstrations

### Limites

- Caractérisation séquentielle de la limite

### Continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes atteintes

## Exercices préparés

### Limites et continuité

- La fonction  $x \mapsto x \cos(x) - x^3 \sin(x)$  admet-elle une limite en  $+\infty$  ?
- Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodiques et admettant une limite en  $+\infty$ .
- Montrer que si deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifient  $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$  alors  $f = g$ .