Semaine 13 du 5 au 9 janvier 2025

Continuité d'une fonction de variable réelle

III) Continuité en un point

- Caractérisation séquentielle
- Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composition

IV) Continuité sur un intervalle

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Toute fonction continue et strictement décroissante sur $[a,b[$ réalise une bijection de $[a,b[$ sur $\left]\lim_{b^-} f, f(a)\right]$ (et variantes)
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- Théorème des bornes atteintes
- Toute fonction réelle continue sur un intervalle et injective est strictement monotone
- Toute fonction continue strictement monotone sur un intervalle admet une bijection réciproque continue et de même monotonie

V) Continuité uniforme

- Fonctions lipschitziennes
- Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues
- Théorème de Heine

VI) Relations de comparaison

- Négligeabilité, domination, équivalents pour des suites ou des fonctions
- Équivalents usuels en 0 obtenus par taux d'accroissement :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

- Équivalents admis : $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$ et $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

I) Divisibilité

- Diviseurs, multiples
- Congruences, compatibilité avec la somme et le produit
- Division euclidienne

II) PGCD

- PGCD de deux entiers
- Algorithme d'Euclide
- Relation de Bézout et algorithme d'Euclide étendu
- Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$

Démonstrations

Continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires
- Théorème des bornes atteintes
- Théorème de Heine

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Compatibilité de la congruence avec la somme et le produit
- Division euclidienne : existence et unicité du quotient et du reste

Exercices préparés

Limites et continuité

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue et de limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.
- Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.
- Donner un exemple de fonction continue mais pas uniformément continue (en justifiant).
- Donner un exemple de fonction uniformément continue non lipschitzienne (en justifiant).