

Dérivation d'une fonction de variable réelle

I) Nombre dérivé, fonction dérivée

- Nombre dérivé défini par la limite du taux d'accroissement
- Caractérisation de la dérivabilité des fonctions à valeurs complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire
- Développement limité à l'ordre 1
- Interprétation géométrique
- Dérivabilité à gauche, à droite
- Dérivée sur un intervalle

II) Opérations sur les fonctions dérivables

- Combinaison linéaire
- Produit, quotient, composée
- Dérivée d'une bijection réciproque

III) Propriétés des fonctions dérivables à valeurs réelles

- Tout extremum local en un point intérieur est un point critique
- Théorème de Rolle
- Théorème (ou égalité) des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$
- Théorème de la limite de la dérivée

IV) Propriétés des fonctions dérivables à valeurs complexes

- Caractérisation des fonctions constantes
- Inégalité des accroissements finis

V) Fonctions de classe C^k

- Dérivée k -ème, fonction de classe C^k , de classe C^∞
- Opérations sur les fonctions de classe C^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque
- Généralisation du théorème de limite de la dérivée
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Inégalité de Taylor-Lagrange

Dérivation

Dém.
exigibles

- Condition nécessaire d'extremum local : point critique
- Théorème de Rolle
- Égalité des accroissements finis
- Inégalité des accroissements finis
- Théorème de la limite de la dérivée
- Formule de Taylor avec reste intégral

Exercices préparés

Dérivabilité

- Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$. Montrer que ses dérivées sont de la forme $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ avec P_n un polynôme. En déduire que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$. Sans résoudre l'équation, montrer que f est de classe C^∞ puis donner une relation entre $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n+1)}$.