

Dérivation d'une fonction de variable réelle

Fonctions convexes

I) Généralités sur les fonctions convexes

- Définition, interprétation géométrique, inégalité de Jensen
- Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes
- Position relative du graphe par rapport à ses sécantes

II) Fonctions convexes dérivables

- Caractérisation de la convexité par la croissance de la dérivée
- Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables par $f'' \geq 0$
- Position relative du graphe d'une fonction convexe et de ses tangentes

Polynômes

I) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau intègre $\mathbb{K}[X]$
- Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire
- Degré d'une somme, d'un produit
- Composition et degré d'une composée
- Diviseurs, multiples
- Division euclidienne
- Dérivée formelle : combinaison linéaire, produit dont formule de Leibniz, composée

démonstrations exigibles

Convexité

- Inégalité de Jensen
- Caractérisation des fonctions convexes dérivables et des fonctions convexes deux fois dérivables

Polynômes

- Degré de $P \circ Q$ si Q est non constant
- Unicité dans la division euclidienne

Exercices préparés

Convexité

- Montrer l'inégalité arithmético-géométrique pour des réels strictement positifs :

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Montrer que si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont convexes et g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.

Polynômes

- Montrer que si P est non constant, le degré de $P(X + 1) - P(X)$ est $\deg(P) - 1$. En déduire tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(X + 1) - P(X) = X$.