

Polynômes

I) Anneau des polynômes à une indéterminée

- Anneau intègre $\mathbb{K}[X]$
- Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire
- Degré d'une somme, d'un produit
- Composition et degré d'une composée
- Diviseurs, multiples
- Division euclidienne
- Dérivée formelle : combinaison linéaire, produit dont formule de Leibniz, composée

II) Fonctions polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme
- Formule de Taylor polynomiale
- Racine, caractérisation en terme de divisibilité
- Multiplicité d'une racine, caractérisation à l'aide des dérivées
- Le nombre de racines est majoré par le degré
- Polynôme scindé, relations coefficients-racines
- Formule d'interpolation de Lagrange et description des polynômes vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

III) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- PGCD, algorithme d'Euclide, relation de Bézout, PPCM
- Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, deux à deux
- Théorème de Bézout, lemme de Gauss

IV) Polynômes irréductibles

- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Décomposition en produit de facteurs irréductibles, dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$
- Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité
- Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont pas de racine commune
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$

Polynômes

Démonstrations exigibles

- Le nombre α est racine de P ssi P est divisible par $X - \alpha$
- Existence et unicité d'un polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
- Formule de Taylor polynomiale
- α est racine de multiplicité m si et seulement si α est racine de $P^{(i)}$ pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ et n'est pas racine de $P^{(m)}$
- Lemme de Gauss
- Si $A \wedge B = 1$, $A|C$ et $B|C$ alors $AB|C$
- Si $A \wedge C = 1$ et $B \wedge C = 1$, alors $(AB) \wedge C = 1$

Polynômes

Exercices préparés

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines du polynôme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ sont simples.
- Soit $P = X^3 + pX + q$ avec $q \neq 0$. On note x_1, x_2, x_3 les trois racines de P dans $\mathbb{C}$. Exprimer en fonction de p et q les quantités :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$$