

Espaces vectoriels

I) Généralités

II) Sous-espaces vectoriels

III) Somme de sous-espaces

IV) Familles de vecteurs

- Familles génératrices, libres, bases
- Liberté d'une famille de polynômes de degrés distincts
- Toute famille de polynômes de degrés distincts est une base
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$

V) Espaces vectoriels de dimension finie

- Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite
- Dimension d'un espace de dimension finie
- Caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs
- Dimension de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Dimension de l'espace des suites solutions d'une relation de récurrence linéaire homogène sur deux rangs, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants
- Dimension d'un produit d'espaces de dimension finie
- Rang d'une famille finie de vecteurs

VI) Dimension d'un sous-espace

- Si $F \subset E$ alors $\dim F \leq \dim E$, cas d'égalité
- Formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
- Existence d'un supplémentaire, base adaptée
- Caractérisation dimensionnelle de $E = F \oplus G$

Séries numériques

I) Convergence et divergence

- Sommes partielles, convergence, somme
- Linéarité de la somme
- Divergence grossière
- Séries télescopiques : $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi $(u_n)_n$ converge
- Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série géométrique, somme

II) Séries à termes réels positifs

- Convergence ssi la suite des sommes partielles est majorée
- Si $0 \leq u_n \leq v_n$, la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$
- Si $u_n \sim v_n$ avec u_n positives, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
- Si f est décroissante, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$
- Séries de Riemann

Espaces vectoriels

- Formule de Grassmann
- Si E est de dimension finie, deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième : (a) $E = F + G$ (b) $F + G$ est directe (c) $\dim E = \dim F + \dim G$

Séries numériques

- Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = 0$
- $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi $(u_n)_n$ converge
- Convergence d'une série à termes positifs si et seulement si ses sommes partielles sont majorées

Démonstrations exigibles

Espaces vectoriels

- Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = 0_2$ est un sous-espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Séries

- À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ et de $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercices préparés