

Séries numériques

I) Convergence et divergence

- Sommes partielles, convergence, somme
- Linéarité de la somme
- Divergence grossière
- Séries télescopiques : $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge ssi $(u_n)_n$ converge
- Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série géométrique, somme

II) Séries à termes réels positifs

- Convergence ssi la suite des sommes partielles est majorée
- Si $0 \leq u_n \leq v_n$, la convergence de $\sum v_n$ entraîne la convergence de $\sum u_n$
- Si $u_n \sim v_n$ avec u_n positives, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature
- Si f est décroissante, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$
- Séries de Riemann

III) Théorème des séries alternées

- Théorème spécial, signe et majoration en valeur absolue des restes

IV) Séries à termes réels ou complexes

- Convergence absolue
- La convergence absolue entraîne la convergence
- Si $v_n \geq 0$, $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente
- Révision : inégalité de Taylor-Lagrange
- Convergence absolue de la série exponentielle avec :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Applications linéaires

I) Généralités

- Application linéaire, combinaison linéaire, composition
- Isomorphisme et linéarité de la réciproque
- Image directe et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire
- Image, noyau
- L'image est engendrée par l'image d'une famille génératrice
- Caractérisation de l'injectivité par le noyau

II) Endomorphismes

- Anneau $\mathcal{L}(E)$
- Homothétie, projection sur F parallèlement à G lorsque $E = F \oplus G$
- Une projection est linéaire et vérifie $p \circ p = p$
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$, alors $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.
- Si $E = F \oplus G$, projection sur F parallèlement à G et symétrie par rapport à F parallèlement à G
- Caractérisation des projections par $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$, des symétries par $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{id}$

III) Détermination d'une application linéaire

- Détermination par image d'une base
- Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité par image d'une base
- Deux e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, détermination de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ à partir de $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$

Suite à partir de mardi.

- Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.

IV) Applications linéaires en dimension finie

- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$
- Théorème du rang

V) Formes linéaires et hyperplans

- Forme linéaire
- Hyperplan : noyau d'une forme linéaire non nulle
- H est un hyperplan ssi il admet une droite vectorielle comme supplémentaire
- Deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi elles sont colinéaires
- Si E est de dimension finie n , une intersection de m hyperplan est de dimension au moins $n - m$
- Réciproquement tout sous-espace de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans

Séries numériques

- Théorème spécial des séries alternées
- Convergence de la série exponentielle

Applications linéaires

- Si u est un isomorphisme, u^{-1} est linéaire
- L'image directe et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel sont des sous-espaces vectoriels
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p^2 = p$, alors $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ et p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s^2 = \text{id}_E$, alors $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$
- Deux espaces de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension

Suite à partir de mardi.

- Forme géométrique du théorème du rang
- Théorème du rang

Démonstrations exigibles

Séries

- Déterminer la nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ dans le cas $\alpha \neq 1$ ou le cas $\alpha = 1$ au choix du colleur

Applications linéaires

- Si p est un projecteur, montrer par double inclusion les égalités $\text{Ker}(\text{id} - p) = \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(\text{id} - p) = \text{Ker}(p)$.

Exercices préparés