

Révisions : applications linéaires

I) Généralités

II) Endomorphismes

III) Détermination d'une application linéaire

IV) Applications linéaires en dimension finie

- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$
- Théorème du rang

V) Formes linéaires et hyperplans

- Forme linéaire
- Hyperplan : noyau d'une forme linéaire non nulle
- H est un hyperplan ssi il admet une droite vectorielle comme supplémentaire
- Deux formes linéaires non nulles ont même noyau ssi elles sont colinéaires
- Si E est de dimension finie n , une intersection de m hyperplan est de dimension au moins $n - m$
- Réciproquement tout sous-espace de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans

Matrice d'une application linéaire

I) Matrice d'une application linéaire dans des bases

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs
- Matrice d'une application linéaire
- Isomorphisme d'e.v. de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}$
- Isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n$
- Coordonnées de l'image d'un vecteur
- Lien entre matrices inversibles et isomorphismes

II) Application canoniquement associée à une matrice

- Noyau, image, rang d'une matrice
- Les colonnes engendrent l'image
- Une matrice carrée est inversible ssi son noyau est réduit à $\{0\}$ ssi ses colonnes engendrent $\mathbb{K}^n$ ssi elle est de rang n
- Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \text{Im}(A)$.
- Rang d'un système linéaire
- Système de Cramer

III) Changement de base

- Matrice de passage d'une base à une autre
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage
- Changement de base et coordonnées d'un vecteur
- Changement de base et matrice d'une application

IV) Matrices équivalentes et rang

- Matrices équivalentes ; elles représentent la même application linéaire
- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il est représenté par J_r dans un couple de bases
- Une matrice est de rang r ssi elle est équivalente à J_r
- Invariance du rang par transposition
- Rang d'une matrice extraite
- Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites

Applications linéaires

- Un s.e.v. est un hyperplan ssi il admet un supplémentaire de dimension 1
- Deux formes linéaires non nulles φ et ψ ont même noyau ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$

Matrice d'une application linéaire

- Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{e,f}(u)$. Si $x \in E$, $X = \text{Mat}_e(x)$ et $Y = \text{Mat}_f(u(x))$, alors $Y = AX$
- L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence
- Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dém. exigibles

Applications linéaires

- Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$, alors f est une homothétie.
- Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $s : P \mapsto P(X) - 2P(0)$. Montrer que s est une symétrie vectorielle par rapport à un hyperplan et parallèlement à une droite que l'on précisera.
- Soient $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{ f \in E \mid f(0) = 0 \}$. Justifier l'égalité $E = F \oplus \text{Vect}(\exp)$.
- Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les formes linéaires sur E définies par :

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E \quad \begin{cases} \varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \varphi_2(x) = x_2 - x_3 \\ \varphi_3(x) = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercices préparés