

Matrice d'une application linéaire

I) Matrice d'une application linéaire dans des bases

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs
- Matrice d'une application linéaire
- Isomorphisme d'e.v. de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}$
- Isomorphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n$
- Coordonnées de l'image d'un vecteur
- Lien entre matrices inversibles et isomorphismes

II) Application canoniquement associée à une matrice

- Noyau, image, rang d'une matrice
- Les colonnes engendrent l'image
- Une matrice carrée est inversible ssi son noyau est réduit à $\{0\}$ ssi ses colonnes engendrent $\mathbb{K}^n$ ssi elle est de rang n
- Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \text{Im}(A)$.
- Rang d'un système linéaire
- Système de Cramer

III) Changement de base

- Matrice de passage d'une base à une autre
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage
- Changement de base et coordonnées d'un vecteur
- Changement de base et matrice d'une application

IV) Matrices équivalentes et rang

- Matrices équivalentes ; elles représentent la même application linéaire
- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il est représenté par J_r dans un couple de bases
- Une matrice est de rang r ssi elle est équivalente à J_r
- Invariance du rang par transposition
- Rang d'une matrice extraite
- Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites
- Invariance de l'image et du rang par opérations élémentaires sur les colonnes
- Invariance du noyau par opérations élémentaires sur les lignes

V) Matrices semblables et trace

- Matrices semblables ; elles représentent le même endomorphisme
- Exemples de recherche de matrice semblable
- Trace d'une matrice carrée, linéarité de la trace
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, invariance par similitude
- Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$
- La trace d'un projecteur est égale à son rang

Déterminants

I) Groupe symétrique

- Groupe S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, cycle, transposition
- Décomposition unique en produit commutatif de cycles à supports disjoints
- Décomposition en produit de transpositions
- Signature d'une permutation

II) Formes n -linéaires alternées

- Antisymétrie, effet d'une permutation
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$

III) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

- Existence et unicité du déterminant dans une base
- Expression dans une base en fonction des coordonnées
- Si e et e' sont deux bases, $\det_e$ et $\det_{e'}$ sont colinéaires
- $(x_1, \dots, x_n)$ est une base ssi $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

IV) Déterminant d'un endomorphisme

- Déterminant d'une composée
- Caractérisation des automorphismes

Matrice d'une application linéaire

- La trace est une forme linéaire non nulle, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et $\text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(A)$
- La trace d'un projecteur est son rang

Groupe symétrique et déterminants

- Décomposition d'une permutation en produit de transpositions en admettant la décomposition d'une permutation en produit de cycles à support disjoints
- $\det_e = \det_{e'}(e') \det_{e'}$
- $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ ssi $(x_1, \dots, x_n)$ est une base

Matrice d'une application linéaire

- Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E dans laquelle f a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$.

(b) Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.