

Déterminants**I) Groupe symétrique**

- Groupe S_n des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, cycle, transposition
- Décomposition unique en produit commutatif de cycles à supports disjoints
- Décomposition en produit de transpositions
- Signature d'une permutation

II) Formes n -linéaires alternées

- Antisymétrie, effet d'une permutation
- Si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$

III) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

- Existence et unicité du déterminant dans une base
- Expression dans une base en fonction des coordonnées
- Si e et e' sont deux bases, $\det_e$ et $\det_{e'}$ sont colinéaires
- $(x_1, \dots, x_n)$ est une base ssi $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

IV) Déterminant d'un endomorphisme

- Déterminant d'une composée
- Caractérisation des automorphismes

V) Déterminant d'une matrice carrée

- Déterminant d'un produit, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Caractérisation des matrices inversibles
- $\det$ induit un morphisme de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^*$
- Déterminant d'une transposée
- Effet des opérations élémentaires
- Déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs
- Cofacteur et développement par rapport à une ligne ou une colonne

VI) Exemples et applications

- Déterminant de Vandermonde
- $A \operatorname{Com}(A)^T = \operatorname{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$
- Expression de l'inverse d'une matrice inversible
- Aire dans $\mathbb{R}^2$ et volume dans $\mathbb{R}^3$
- Orientation d'un espace vectoriel
- Équation d'un hyperplan
- Introduction au polynôme caractéristique

Groupe symétrique et déterminants

- Décomposition d'une permutation en produit de transpositions en admettant la décomposition d'une permutation en produit de cycles à support disjoints
- $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ ssi $(x_1, \dots, x_n)$ est une base
- Formule de développement selon la colonne j , en admettant la formule du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs de la forme $\begin{vmatrix} \alpha & * \\ 0 & A \end{vmatrix} = \alpha \det(A)$
- $A \operatorname{Com}(A)^T = \operatorname{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$
- Calcul du déterminant de Vandermonde

Démonstrations exigibles

Matrice d'une application linéaire

- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = O_n$ et soit u l'endomorphisme canoniquement associé. On note $p = \operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(u)$.

(a) Montrer l'inclusion $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et en déduire $2p \leq n$.

(b) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = PNP^{-1}$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminants

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et e une base de E . Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on pose :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \det_e(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Justifier que f est n -linéaire alternée et en déduire

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{tr}(u) \det_e(x_1, \dots, x_n)$$

- Factoriser le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x-3 & 1 \\ 2 & -2 & x \end{vmatrix}$$

Exercices préparés