

Dénombrement

I) Cardinal d'un ensemble fini

- Cardinal d'une partie, cas d'égalité
- Si $f : E \rightarrow F$ est injective, $|E| \leq |F|$
- Si $f : E \rightarrow F$ est surjective, $|E| \geq |F|$
- Si $|E| = |F|$, f injective ssi f surjective
- Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, différence, produit cartésien

II) Dénombrement

- Cardinal de $\mathcal{P}(E)$, de F^E
- Nombre de p -listes, d'arrangements
- Nombre de permutations
- Nombre d'applications injectives
- Nombre de combinaisons

Espaces probabilisés et variables aléatoires

I) Univers, événements, variables aléatoires

- Univers, événements élémentaires, incompatibles
- Système complet d'événements
- Variable aléatoire

II) Espaces probabilisés

- Probabilité, distribution de probabilités
- Probabilité uniforme
- Probabilité de la réunion, la différence, l'événement contraire
- Croissance, sous-additivité

III) Conditionnement

- Probabilités conditionnelles
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes

IV) Événements indépendants

- Indépendance de deux événements
- Familles finies d'événements indépendants
- Indépendance des événements complémentaires

V) Loi d'une variable aléatoire

- Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$

- Lois usuelles : uniforme, de Bernoulli, binomiale
- Loi conditionnelle
- Couples et n -uplets : loi conjointe et lois marginales

VI) Variables aléatoires indépendantes

- Indépendance de 2 ou n variables aléatoires

Suite à partir de mardi :

- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$
- Lemme des coalitions
- Interprétation de la loi binomiale comme nombre de succès lors de répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli

Dénombrement

- Démonstration combinatoire de la formule de Pascal

Espaces probabilisés

- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales et formule de Bayes
- Donner un exemple de 3 événements non indépendants mais 2 à 2 indépendants

Dénombrement

- Combien y a-t-il de permutations de S_5 admettant exactement 2 points fixes ?
- Combien existe-t-il de surjections d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal 2 ? Et d'un ensemble de cardinal $n + 1$ sur un ensemble de cardinal n ?

Espaces probabilisés

- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés et pour lesquels la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 12. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
- On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie avec remise. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 , sinon dans l'urne U_2 , et ainsi de suite. On note p_n la probabilité de tirer une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage. Montrer que l'on a $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.