

Espaces probabilisés et variables aléatoires

I) Univers, évènements, variables aléatoires

- Univers, évènements élémentaires, incompatibles
- Système complet d'évènements
- Variable aléatoire

II) Espaces probabilisés

- Probabilité, distribution de probabilités
- Probabilité uniforme
- Probabilité de la réunion, la différence, l'évènement contraire
- Croissance, sous-additivité

III) Conditionnement

- Probabilités conditionnelles
- Formule des probabilités composées
- Formule des probabilités totales
- Formule de Bayes

IV) Évènements indépendants

- Indépendance de deux évènements
- Familles finies d'évènements indépendants
- Indépendance des évènements complémentaires

V) Loi d'une variable aléatoire

- Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$
- Lois usuelles : uniforme, de Bernoulli, binomiale
- Loi conditionnelle
- Couples et n -uplets : loi conjointe et lois marginales

VI) Variables aléatoires indépendantes

- Indépendance de 2 ou n variables aléatoires
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$
- Lemme des coalitions
- Interprétation de la loi binomiale comme nombre de succès lors de répétitions indépendantes d'une expérience de Bernoulli

Espérance et variance des variables aléatoires

I) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

- Espérance, variable aléatoire centrée
- Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire
- Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale

- Formule de transfert
- Si X et Y sont indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

II) Variance d'une variable aléatoire réelle

- Variance et écart-type, variable aléatoire réduite
- Formule de König-Huygens
- Covariance, variables décorrélées
- Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de v.a. indépendantes
- Variance d'une somme, cas de v.a. décorrélées
- Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale

III) Inégalités probabilistes

- Inégalité de Markov
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi

Espaces probabilisés

- Si n variables X_i indépendantes suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors leur somme suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Espérance et variance

- Espérance et variance des lois usuelles
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$
- Formule de König-Huygens
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres

Démonstrations exigibles

Espérance et variance

- On choisit une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ au hasard et on note N le nombre de ses points fixes. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note F_i l'évènement « la permutation choisie admet i pour point fixe » et $X_i = \mathbf{1}_{F_i}$.
 - Calculer $\mathbb{P}(F_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i < j$.
 - Exprimer N en fonction des variables $X_1, \dots, X_n$. En déduire $\mathbb{E}(N)$.
 - Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$ pour tout $i \neq j$ et en déduire $\mathbb{V}(N)$.
 - Montrer que l'on a $\mathbb{P}(N \geq 4) \leq \frac{1}{9}$.

Exercices préparés