

Espaces préhilbertiens réels

I) Produit scalaire

- Produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f g$ sur $C([a, b], \mathbb{R})$
- Norme associée, distance
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité
- Identité $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$
- Formule de polarisation associée

II) Orthogonalité

- Orthogonal $X^\perp$ d'une partie
- Famille orthogonale, orthonormée
- Théorème de Pythagore
- Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Existence de bases orthonormées en dimension finie
- Expression des coordonnées et du produit scalaire dans une b.o.n.

III) Projection orthogonale

- Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie
- Projection orthogonale
- Expression du projeté orthogonal dans une b.o.n.
- Distance $d(x, F)$ réalisée en $p_F(x)$
- Cas d'un hyperplan : $d(x, \text{Vect}(u)^\perp)$

IV) Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien

- Si E est euclidien, isomorphisme $a \mapsto (x \mapsto \langle a, x \rangle)$ entre E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Espaces préhilbertiens

Démonstrations exigibles

- Montrer que les applications $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$ et $(f, g) \mapsto \int_a^b f g$ sont des produits scalaires sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C([a, b], \mathbb{R})$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz sans le cas d'égalité
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité
- Tout s.e.v. de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal (pour les étudiants : la synthèse suffit si l'on rappelle la preuve de $F \oplus F^\perp$ directe)
- Coordonnées d'un vecteur et expression du produit scalaire dans une base orthonormale
- Si $F \oplus F^\perp = E$, la distance $d(x, F)$ est atteinte en un point unique $p_F(x)$.
- Isomorphisme $a \mapsto (x \mapsto \langle x, a \rangle)$ entre E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Espaces préhilbertiens réels

Exercices préparés

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer l'inégalité :

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ?