Semaine 4 du 5 au 9 octobre 2026

Calculs algébriques

I) Sommes et produits

- Changement d'indice
- Sommes et produits télescopiques
- Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$

II) Calculs de sommes

- Regroupement de termes (notamment selon la parité de l'indice)
- Expressions de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$
- Somme de termes de suites arithmétiques ou géométriques
- Sommes trigonométriques $\sum_k \cos(k\theta)$, $\sum_k \sin(k\theta)$
- La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle si $n \geqslant 2$
- Sommes doubles, sommes triangulaires, produit de sommes finies

III) Formule du binôme

- Factorielle
- Coefficients binomiaux
- Formule du binôme
- Utilisation de la formule de Moivre pour exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$

IV) Résolution de systèmes linéaires par pivot de Gauss

- Opérations élémentaires de pivot $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- Algorithme du pivot
- Application aux intersections de droites et de plan

Ensembles, applications

I) Ensembles

- Appartenance, inclusion
- Partie, ensemble vide
- Réunion, intersection, différence, complémentaire
- Produit cartésien, ensemble des parties
- Recouvrement disjoint, partition

II) Application d'un ensemble dans un ensemble

- Application, graphe
- Fonction indicatrice d'une partie
- Restriction et prolongement
- Image directe $f(A)$, image réciproque notée provisoirement ${}^{-1}f(B)$
- Composition, injection, surjection, bijection
- Bijection réciproque

Démonstrations exigibles

Calculs algébriques

- Calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ et factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$
- Expression de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et de $\sum_{k=0}^{n} x^k$
- Formule du triangle de Pascal et $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$
- Formule du binôme

Ensembles et applications

- La composée de deux injections est injective.
- La composée de deux surjections est surjective.

Exercices préparés

Calculs algébriques

- Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$
- Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Ensembles et applications

- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.