Semaine 5 du 12 au 16 octobre 2026

Ensembles, applications

I) Ensembles

II) Application d'un ensemble dans un ensemble

- Application, graphe
- Fonction indicatrice d'une partie
- Restriction et prolongement
- Image directe $f(A)$, image réciproque notée provisoirement ${}^{-1}f(B)$
- Composition, injection, surjection, bijection
- Bijection réciproque, réciproque d'une composée

III) Relation binaire sur un ensemble

- Relation d'équivalence, classes d'équivalence
- Les classes d'équivalence forment une partition
- La relation de congruence modulo a est une relation d'équivalence
- Relation d'ordre, ordre total, ordre partiel

Fonctions de variable réelle

I) Généralités sur les fonctions

- Ensemble de définition ; somme, produit, composée
- Représentation graphique dans le cas d'une fonction à valeurs réelles
- Action sur le graphe de transformations du type $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$
- Parité, imparité, périodicité
- Monotonie
- Fonctions majorées, minorées, bornées
- f bornée ssi $|f|$ majorée

II) Dérivation

- Définition par taux d'accroissement
- Interprétation géométrique, tangente
- Dérivée d'une fonction à valeurs complexes : $(f_1 + \mathrm{i}f_2)' = f_1' + \mathrm{i}f_2'$
- Sans démonstration : dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, d'une fonction réciproque
- Dérivée de $\exp\circ\phi$ si $\phi : I \to \mathbb{C}$
- Fonctions de classe C^k (seulement la définition)

III) Études de fonctions

- Caractérisation des fonctions constantes et (strictement) (dé)croissantes parmi les fonctions dérivables sur un intervalle
- Recherche d'extremum ou preuve d'inégalité par étude d'une fonction auxiliaire
- Branches infinies (branche parabolique et asymptote horizontale, verticale ou oblique)
- Convexité pour une fonction dérivable

Fonctions usuelles

I) Fonctions exponentielle, logarithme et puissances

- Exponentielle (admis : unique solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$)
- Logarithme népérien (défini comme sa réciproque).
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- Variations, limites et convexité de exp et ln
- $\exp(x) \leqslant 1 + x$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$
- Fonctions puissances, règles de calcul, tracé
- Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle

Démonstrations exigibles

Ensembles et applications

- La composée de deux injections est injective.
- La composée de deux surjections est surjective.
- La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$

Fonctions d'une variable réelle

- f est bornée ssi $|f|$ est majorée
- Dérivée de $\exp\circ\phi$ si $\phi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable

Fonctions usuelles

- $\exp(x) \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$
- Si $x > 0$ et $y > 0$, $x^{a+b} = x^a x^b$, $(xy)^a = x^a y^a$ et $(x^a)^b = x^{ab}$

Exercices

Applications

- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- Montrer $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ et prouver l'égalité si f est injective.