Semaine 6 du 2 au 6 novembre 2026

Fonctions de variable réelle

I) Généralités sur les fonctions

II) Dérivation

III) Études de fonctions

Fonctions usuelles

I) Fonctions exponentielle, logarithme et puissances

- Exponentielle (admis : unique solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$)
- Logarithme népérien (défini comme sa réciproque).
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
- Variations, limites et convexité de exp et ln
- $\exp(x) \leqslant 1 + x$ et $\ln(x) \leqslant x - 1$
- Fonctions puissances, règles de calcul, tracé
- Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle

II) Fonctions trigonométriques réciproques et hyperboliques

- Dérivée, variations, représentation graphique de Arcsin, Arccos et Arctan
- $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(1/x) = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Fonctions ch, sh et th : variations, limites, tracé
- Formule $\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y) = 1$

Calcul intégral

I) Propriétés de l'intégrale

- Intégrale d'une fonction à valeurs réelles (admis)
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes : $\int_a^b f \overset{\text{déf}}{=} \int_a^b \operatorname{Re}(f) + \mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im}(f)$
- Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire (résultats admis)
- Pour f à valeurs réelles : positivité, croissance (résultats admis)

II) Primitives

- Primitive d'une fonction à valeurs complexes
- Sur un intervalle les primitives diffèrent d'une constante additive
- Théorème fondamental (admis) : si f est continue, alors $x \mapsto \int_a^x f$ est la primitive de f s'annulant en a ; elle est de classe C^1
- Si F est une primitive de f on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

III) Intégration par parties et changement de variable

- Intégration par parties (fonctions de classe C^1)
- Changement de variable (f continue et φ de classe C^1)
- Application au calcul de primitives

IV) Recherche de primitives

- Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$; application aux fonctions $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $t \mapsto e^{ax}\sin(bx)$
- Primitives des fonctions logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques
- Primitives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Démonstrations exigibles

Fonctions usuelles

- $\exp(x) \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$
- Si $x > 0$ et $y > 0$, $x^{a+b} = x^a x^b$, $(xy)^a = x^a y^a$ et $(x^a)^b = x^{ab}$
- Justifier que $\tan : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est une bijection et tracer les courbes représentatives de tan et Arctan
- Dérivées de Arccos, Arcsin, Arctan, ch, sh

Intégrales et primitives

- Si F_0 est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sont les fonctions de la forme $t \mapsto F_0(t) + C$ avec $C \in \mathbb{K}$
- Formule d'intégration par parties
- Formule de changement de variable

Exercices

Intégrales et primitives

- Déterminer une primitive de Arctan
- Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ où a et b sont des réels non nuls
- Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire une expression de I_{2p} pour tout p dans $\mathbb{N}$.