

Dérivées, intégrales et primitives

I) Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

- Dérivée d'une fonction complexe
- f est dérivable ssi $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ le sont
- Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient (résultats admis)
- Dérivée de la composée d'une fonction à valeurs réelles par une fonction à valeurs complexes (résultat admis)
- Dérivée de $\exp \circ \Phi$ où Φ est à valeurs complexes

II) Intégrales et primitives

- Intégrale d'une fonction à valeurs réelles
- Intégrale d'une fonction à valeurs complexes : $\int_a^b f = \int_a^b \text{Re}(f) + i \int_a^b \text{Im}(f)$
- Linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire (résultats admis)
- Pour f à valeurs réelles : positivité, croissance (résultats admis)
- Primitive d'une fonction à valeurs complexes
- Sur un intervalle les primitives diffèrent d'une constante additive
- Théorème fondamental (admis) : si f est continue, alors $x \mapsto \int_a^x f$ est la primitive de f s'annulant en a ; elle est de classe \mathcal{C}^1
- Si F est une primitive de f on a $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

III) Intégration par parties et changement de variable

- Intégration par parties
- Changement de variable
- Application au calcul de primitives

IV) Recherche de primitives

- Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$; application aux fonctions $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$
- Primitives des fonctions logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques
- Primitives des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$

Équations différentielles linéaires

I) Équations différentielles du premier ordre

- Solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$
- Principe de superposition
- Forme des solutions de l'équation complète
- Méthode de variation de la constante
- Théorème de Cauchy

Dérivation, intégrales et primitives

- Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante additive
- Formule d'intégration par parties
- Formule de changement de variable

Équations différentielles linéaire

- Solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$
- Principe de superposition
- Si y_p est une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$, l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y_p + y_h$ avec y_h solution de l'équation homogène.

Intégrales et primitives

- Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$. Montrer, pour tout entier naturel n , l'égalité $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire une expression de I_{2p} pour tout p dans \mathbb{N} .
- Calculer $\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$ à l'aide du changement de variable $t = \sin \theta$.
- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{\text{sh}(t)} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et déterminer sa dérivée.