

Équations différentielles linéaires

I) Équations différentielles du premier ordre

- Solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$
- Principe de superposition
- Forme des solutions de l'équation complète
- Méthode de variation de la constante
- Problème de Cauchy, théorème de Cauchy

II) Équations différentielles du second ordre

- Solutions des équations homogènes à coefficients constants de fonction inconnue à valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C}
- Principe de superposition
- Forme des solutions de l'équation complète
- Recherche d'une solution particulière pour un second membre polynomial, exponentiel, ou de la forme $e^{ax} \cos(bx)$ ou $e^{ax} \sin(bx)$ (l'équation homogène étant à coefficients constants)
- Problème de Cauchy, théorème de Cauchy
- Exemples de changement de variable

Relations sur un ensemble et ensemble des nombres réels

I) Relation binaire sur un ensemble

- Relation d'équivalence, classes d'équivalence
- Les classes d'équivalence forment une partition
- La relation de congruence modulo a est une relation d'équivalence
- Relation d'ordre, ordre total, ordre partiel

Équations différentielles linéaire

- Solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$
- Principe de superposition (pour une équation du premier ou du second ordre)
- Si y_p est une solution particulière de l'équation complète (du premier ou du second ordre), l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions de la forme $y_p + y_h$ avec y_h solution de l'équation homogène.

Relations sur un ensemble

- Les classes d'équivalence pour une relation d'équivalence sur un ensemble E forment une partition de E .
- La congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z}

Démonstrations exigibles

Intégrales et primitives

- Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$. Montrer, pour tout entier naturel n , l'égalité $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire une expression de I_{2p} pour tout p dans \mathbb{N} .
- Calculer $\int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt$ à l'aide du changement de variable $t = \sin \theta$.
- Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{\operatorname{sh}(t)} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et déterminer sa dérivée.
- Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . À l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t+x^2) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser sa dérivée.
- Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 1 + \sin(2x)$
- Résoudre sur \mathbb{R}_+ l'équation $x^2 y'' - xy' + y = x$ à l'aide du changement de variable $x = e^t$.

Relations sur un ensemble

- Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre sur \mathbb{N}^* .

Exercices préparés