Semaine 9 du 27 novembre au 1er décembre 2023

Relations sur un ensemble et ensemble des nombres réels

I) *Relation binaire sur un ensemble*

- Relation d'équivalence, classes d'équivalence
- Les classes d'équivalence forment une partition
- La relation de congruence modulo a est une relation d'équivalence
- Relation d'ordre, ordre total, ordre partiel

II) *Ensemble des nombres réels*

- Approximations décimales d'un réel
- Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$
- Borne supérieure, borne inférieure
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (admis)
- X est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi $\forall\ (a, b) \in X^2\ [a, b] \subset X$

Suites numériques

I) *Généralités*

- Modes de définition : explicite, implicite, par récurrence
- Suites réelles majorées, minorées, bornées, monotones, stationnaires
- Suites complexes bornées, stationnaires

II) *Limite d'une suite*

- Limite d'une suite, unicité
- Toute suite convergente est bornée
- Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient
- Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle
- Passage à la limite d'une inégalité large
- Si u_n tend vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
- Caractérisation de la limite d'une suite complexe par les parties réelle et imaginaire

III) *Théorèmes d'existence de limites*

- Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$)
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes *(démonstration au programme de la semaine suivante)*

Démonstrations exigibles

Relations sur un ensemble

- Les classes d'équivalence pour une relation d'équivalence sur un ensemble E forment une partition de E.
- La congruence modulo $n \in \mathbb{N}^*$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$
- Si M est la borne supérieure d'une partie non vide majorée X de $\mathbb{R}$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $M - \epsilon < x \leqslant M$

Limite d'une suite

- Unicité de la limite
- Toute suite convergente est bornée
- Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$, alors $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$ (premier cas de la démonstration du cours)
- Théorème de la limite encadrée
- Théorème de la limite monotone

Exercices préparés

Relations sur un ensemble et ensemble des nombres réels

- Montrer que la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
- Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions majorées. Comparer $\sup(f + g)$ et $\sup f + \sup g$.

Suites numériques

- Montrer que toute suite convergente d'entiers est stationnaire.