Semaine 10 du 4 au 8 décembre 2023

Ensemble des nombres réels

Suites numériques

I) Généralités

- Modes de définition : explicite, implicite, par récurrence
- Suites réelles majorées, minorées, bornées, monotones, stationnaires
- Suites complexes bornées, stationnaires

II) Limite d'une suite

- Limite d'une suite, unicité
- Toute suite convergente est bornée
- Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient
- Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle
- Passage à la limite d'une inégalité large
- Si u_n tend vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
- Caractérisation de la limite d'une suite complexe par les parties réelle et imaginaire

III) Théorèmes d'existence de limites

- Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$)
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes

IV) Suites extraites

- Toute suite extraite d'une suite de limite ℓ a pour limite ℓ
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite, alors (u_n) a la même limite
- Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par dichotomie

V) Caractérisations séquentielles

- Caractérisation séquentielle de la densité
- Densité de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
- Si X est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (resp. non majorée), il existe une suite d'éléments de X convergeant vers $\sup X$ (resp. $+\infty$).
- Cas de la borne inférieure

VI) Suites récurrentes linéaires

- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

VII) Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

- Intervalle stable
- Utilisation du signe de $g(x) - x$ ou de la croissance de f pour étudier la monotonie.
- Si u converge vers ℓ et f est continue, alors $f(\ell) = \ell$

Démonstrations exigibles

Suites numériques

- Unicité de la limite
- Toute suite convergente est bornée
- Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$, alors $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$ (premier cas de la démonstration du cours)
- Théorème de la limite encadrée
- Théorème de la limite monotone
- Théorème des suites adjacentes
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ
- Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$ en admettant le résultat dans $\mathbb{R}$
- Existence d'une suite d'éléments de X convergeant vers $\sup X$ lorsque X est non vide majoré

Exercices préparés

Ensemble des nombres réels

- Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et x un réel justifier l'existence de

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} |x - a|$$

Montrer, pour tous réels x et y : $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$

Suites numériques

- Montrer que toute suite convergente d'entiers est stationnaire.
- *Théorème de Cesàro.* Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n$ tend vers ℓ.