

Suites numériques

I) Généralités

II) Limite d'une suite

III) Théorèmes d'existence de limites

IV) Suites extraites

- Toute suite extraite d'une suite de limite ℓ a pour limite ℓ
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite, alors (u_n) a la même limite
- Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par dichotomie

V) Caractérisations séquentielles

- Caractérisation séquentielle de la densité
- Densité de \mathbb{D} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R}
- Si X est une partie de \mathbb{R} non vide majorée (resp. non majorée), il existe une suite d'éléments de X convergeant vers $\sup X$ (resp. $+\infty$).
- Cas de la borne inférieure

VI) Suites récurrentes linéaires

- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

VII) Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

- Intervalle stable
- Utilisation du signe de $g(x) - x$ ou de la croissance de f pour étudier la monotonie.
- Si u converge vers ℓ et f est continue, alors $f(\ell) = \ell$

VIII) Relations de comparaison

- Négligeabilité, domination, équivalence (*équivalents usuels non exigibles et redémontrés par limite d'un taux d'accroissement*)
- Opérations
- Formule de Stirling (admise), croissances comparées

Applications et structures algébriques

I) Application d'un ensemble dans un ensemble

- Application, graphe
- Famille d'éléments d'un ensemble, fonction indicatrice d'une partie
- Restriction et prolongement
- Image directe $f(A)$, image réciproque notée provisoirement $^{-1}f(B)$
- Composition, injection, surjection
- Bijection réciproque, réciproque d'une composée

Suites numériques

- Théorème des suites adjacentes
- Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ , alors (u_n) converge vers ℓ
- Théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{C} en admettant le résultat dans \mathbb{R}
- Existence d'une suite d'éléments de X convergeant vers $\sup X$ lorsque X est non vide majoré

Applications

- La composée de deux injections est injective.
- La composée de deux surjections est surjective.

Suites numériques

- Montrer que toute suite convergente d'entiers est stationnaire.
- *Théorème de Cesàro*. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ , alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ tend vers ℓ .

- Donner un équivalent de $\frac{n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\tan \left(\frac{\pi}{n}\right)}$

Applications

- Déterminer l'image directe de \mathbb{R}^+ et l'image réciproque de $[-2, 4]$ par $f : x \mapsto x^2 - 2x$.