

Applications et structures algébriques

I) Application d'un ensemble dans un ensemble

- Application, graphe
- Famille d'éléments d'un ensemble, fonction indicatrice d'une partie
- Restriction et prolongement
- Image directe $f(A)$, image réciproque notée provisoirement $^{-1}f(B)$
- Composition, injection, surjection
- Bijection réciproque, réciproque d'une composée

II) Loi de composition interne

- Associativité, commutativité
- Élément neutre, inversibilité
- Distributivité, partie stable

III) Structure de groupe

- Groupe des permutations d'un ensemble, groupe produit
- Sous-groupe
- Morphisme de groupes
- Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme
- Image et noyau

IV) Structure d'anneau et de corps

- Calcul dans un anneau
- Groupe des inversibles
- Anneau intègre, corps
- Sous-anneau
- Morphisme d'anneau

Applications

- La composée de deux injections est injective.
- La composée de deux surjections est surjective.

Structures algébriques

- L'image d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.
- Formule du binôme
- Factorisation de $a^n - b^n$ si a et b commutent.

Applications

- Déterminer l'image directe de \mathbb{R}^+ et l'image réciproque de $[-2, 4]$ par $f : x \mapsto x^2 - 2x$.

Structures algébriques

- Montrer que dans un groupe $(G, *)$, les translations $g \mapsto a * g$ sont des bijections de G dans lui-même.
- Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
- Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$
- Montrer que l'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe.