

ANALYSE DIMENSIONNELLE ET OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Mis en ligne lundi 1^{er} septembre 2025

À rendre vendredi 12 septembre 2025 à 8h15

I. Échelles de longueur et d'énergie atomiques

En mécanique quantique, le comportement de l'électron de l'atome d'hydrogène est régi par l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi = E \varphi$$

où φ est la fonction d'onde de l'électron, E son énergie, m sa masse, r sa distance au noyau et Δ un opérateur de dérivation spatiale appelé Laplacien (dérivée seconde par rapport à l'espace).

On donne :

★ Constante de Planck réduite $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J.s ;

★ $4\pi\epsilon_0 = 1,2 \cdot 10^{-10}$ F.m⁻¹ ;

★ $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg

★ Charge élémentaire $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C

1. Déterminer la dimension de l'énergie E .
2. Justifier que $\dim(e) = \text{I.T.}$
3. Dédire des deux questions précédentes la dimension de ϵ_0 .
4. Montrer que $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2}$ est l'échelle caractéristique de longueur au niveau atomique. En déduire l'ordre de grandeur des distances atomiques.
5. Énergie atomique

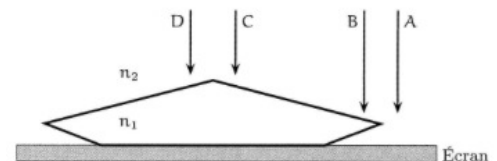
a) Déterminer l'échelle caractéristique d'énergie de l'électron, le Rydberg R_y , sous la forme :

$$R_y = \frac{1}{2} \hbar^\alpha m^\beta e^\gamma (4\pi\epsilon_0)^\delta$$

b) Application numérique : calculer R_y en électron-Volt ($1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

II. Reconnaissance de gemmes

Un solide transparent d'indice de réfraction n_1 , est plongé dans un liquide transparent d'indice de réfraction n_2 (Figure ci-contre). Un faisceau lumineux, en incidence normale, vient éclairer le solide, et après la traversée de celui-ci, illumine un écran situé sous le solide.



1. En reproduisant fidèlement la figure ci-contre (et en l'agrandissant), tracer l'allure du prolongement des rayons réfractés issus de A, B, C et D, jusqu'à l'écran, dans le cas où l'indice de réfraction n_1 est supérieur à n_2 , puis dans le cas où l'indice de réfraction n_1 est inférieur à n_2 . On ne tiendra pas compte des rayons réfléchis. En déduire les zones de plus forte et de plus faible intensité lumineuse sur l'écran.
2. Application : un collectionneur de gemmes possède trois petites pierres transparentes et incolores : une moissanite, un zircon et un morceau de verre à fort indice (flint), ainsi qu'un flacon de iodure de méthylène liquide.

Les propriétés physiques de ces quatre substances sont résumées dans le tableau ci-dessous :

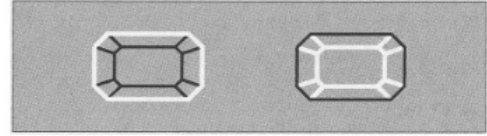
Substance	Masse volumique (kg.m ⁻³)	Indice de réfraction
Zircon	4690	1,95
Moissanite	3210	2,70
Verre flint	3740	1,64
Iodure de méthylène	3330	1,75

- a) L'immersion des trois pierres dans le iodure deméthylène, permet de reconnaître immédiatement l'une des trois pierres. Laquelle ?
- b) Les deux pierres restantes sont posées sur un morceau de verre dépoli, recouvertes de iodure de méthylène, puis éclairées depuis le haut. Un miroir incliné situé sous le verre dépoli permet d'observer le verre dépoli par en dessous.

La pierre numéro 1 est entourée d'un contour brillant, et ses arêtes vives sont sombres.

La pierre numéro 2 est entourée d'un contour sombre, et ses arêtes paraissent brillantes (Figure ci-contre).

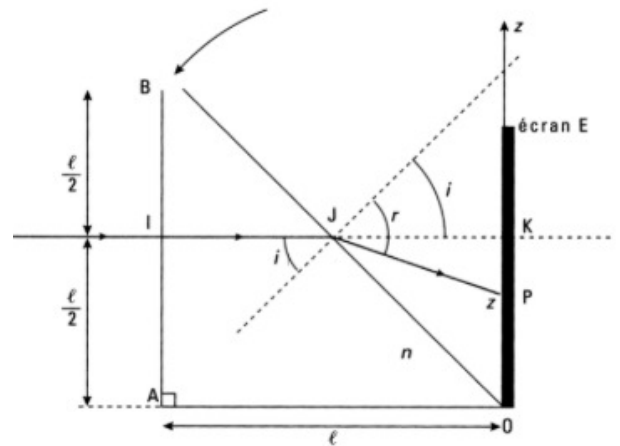
Identifier les pierres numéro 1 et numéro 2.



III. Indice d'un liquide

Une cuve en verre a la forme d'un prisme de section droite rectangle isocèle. Elle est posée horizontalement sur une des arêtes de longueur ℓ du triangle isocèle, et le sommet opposé à ce côté est ouvert pour permettre de remplir la cuve d'un liquide transparent d'indice n . Un pinceau de lumière est envoyé horizontalement sur la face verticale de la cuve, dans un plan de section droite, à la hauteur $\ell/2$.

Ce rayon émerge au-delà de l'hypothénuse et rencontre en un point P un écran E placé verticalement à la distance ℓ de la face d'entrée du dispositif. On néglige l'effet dû aux parois en verre sur la propagation du pinceau de lumière.



1. Quelle limite supérieure peut-on donner à la valeur de l'indice ?
2. Quel est l'indice n du liquide contenu dans la cuve en fonction de ℓ et de z ?
3. Application numérique : calculer n avec $\ell = 30$ cm et $z = 6,7$ cm.