LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS EN PHYSIQUE & CHIMIE

Pourquoi les équations différentielles ?

On les retrouve dans tous les domaines de la physique :

- En mécanique, par application du PFD ou 2ème loi de Newton.
- En électricité, dans les régimes transitoires, par application des lois de Kirchhoff.
- En thermodynamique, dans les phénomènes de conduction de la chaleur.
- En induction électromagnétique.
- En cinétique chimique, pour déterminer l'ordre d'une réaction chimique.

Forme générale d'une équation différentielle à coefficients constants d'ordre n :

$\boxed{a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)}$ où les a_k sont des constantes.

<u>Solution générale :</u>

La solution est de la forme : $\boxed{\boldsymbol{x(t) = x_h(t) + x_P(t)}\ ;}$

✓ <u>**Mathématiquement:**</u>

- $\boldsymbol{x_h(t)}$ est ***la*** solution homogène de l'équation sans second membre. Elle dépend de n constantes d'intégration pour une équation d'ordre n.
- $\boldsymbol{x_P(t)}$ est **une** solution particulière de l'équation avec second membre. **Elle est de la forme du second membre et satisfait à l'équation différentielle.**

✓ <u>**Physiquement :**</u>

- $\boldsymbol{x(t)}$ correspond au **régime transitoire**.
- $\boldsymbol{x_h(t)}$ correspond au **régime libre**. Elle tend vers 0 pour t > 5τ où τ est le temps de relaxation du système.
- $\boldsymbol{x_P(t)}$ correspond au **régime forcé ou permanent**.

Régime transitoire = Régime libre + Régime forcé ;

Pour t > 5τ, le régime transitoire laisse place au régime forcé.

<u>Solution générale d'une équation du 1er ordre de la forme</u> :

Forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = cste}}$;

Solution homogène : $x_h(t) = A \exp(-\frac{t}{\tau})$

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $x(t) = x_h(t) + x_p = A \exp(-\frac{t}{\tau}) + x_p$;

Déterminer A grâce à **une condition initiale**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE !!

L'équation écrite sous cette forme fait apparaître τ la <u>constante de temps du système</u>, dans le cas des systèmes du premier ordre ; C'est aussi le temps de relaxation du système.

<u>Solution générale d'une équation du 2nd ordre de la forme :</u>

Forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\, x(t) = cste}}$;

<u>**Méthode de résolution :**</u>

A cette équation, on associe *l'équation caractéristique* : $\boxed{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 = 0}$ **;** *(1)*

Alors *Discriminant* : $\boxed{\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)}$.

✓ **1^er cas : Cas du régime pseudopériodique : $\Delta < 0$:**

Racines complexes de l'équation caractéristique : $r_{1,2} = -\frac{\frac{\omega_0}{Q} \mp i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha \pm j\Omega$;

Puis *Solution homogène* : $x_h(t) = exp\,(\alpha t)[Acos(\Omega t) + Bsin(\Omega t)]$
ou $x_h(t) = D\ exp\,(\alpha t)\cos\,(\Omega t + \varphi)$;

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p = exp(\alpha t)\,[Acos(\Omega t) + Bsin(\Omega t)] + x_p}$;

Déterminer A et B ou D et φ grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

✓ **2^ème cas: Cas du régime critique : $\Delta = 0$:**

Racine double de l'équation caractéristique : $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$, car $Q = \frac{1}{2}$;

Puis *Solution homogène* : $x_h(t) = (At + B)\exp(r_0 t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t)$;

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale $\boxed{: x(t) = x_h(t) + x_p = (At + B)\exp(-\omega_0 t) + x_p}$;

Déterminer A et B grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

✓ **3^ème cas : Cas du régime apériodique : $\Delta > 0$:**

Racines réelles de l'équation caractéristique : $r_{1,2} = -\frac{\frac{\omega_0}{Q} \mp \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$;

Puis *Solution homogène* : $x_h(t) = A\,exp(r_1 t) + B\,exp(r_2 t)$;

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale $\boxed{: x(t) = x_h(t) + x_p = A\,exp(r_1 t) + B\,exp(r_2 t) + x_p}$;

Déterminer A et B grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

Solution générale d'une équation du 2^nd ordre sans amortissement :

Forme canonique $\boxed{: \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x(t) = cste}$;

Solution homogène : $x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $x(t) = x_h(t) + x_p = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_p$;

Déterminer A et B grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

Solution générale d'une équation *mécanique* du 2^nd ordre de la forme :

Forme canonique $\boxed{: \frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2\, x(t) = cste}$;

On lui associe *l'équation caractéristique* : $s^2 - \omega_0^2 = 0$ **; Soit** $\boldsymbol{s = \pm\omega_0}$

Solution générale : $x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$

Déterminer A et B grâce à **deux conditions initiales**, l'une sur la position et l'autre sur la vitesse.

Remarque : Dans ce cas, le système mécanique n'oscille pas, mais la solution diverge : $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$.