LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS EN PHYSIQUE & CHIMIE

Pourquoi les équations différentielles ?

On les retrouve dans tous les domaines de la physique :

- En mécanique, par application du PFD ou 2ème loi de Newton.
- En électricité, dans les régimes transitoires, par application des lois de Kirchhoff.
- En thermodynamique, dans les phénomènes de conduction de la chaleur.
- En induction électromagnétique.
- En cinétique chimique, pour déterminer l'ordre d'une réaction chimique.

Forme générale d'une équation différentielle à coefficients constants d'ordre n :

$\boxed{a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)}$ où les a_k sont des constantes.

Solution générale :

La solution est de la forme : $\boxed{\boldsymbol{x(t) = x_h(t) + x_P(t)\ ;}}$

✓ **Mathématiquement:**

- $\boldsymbol{x_h(t)}$ est ***la*** solution homogène de l'équation sans second membre. Elle dépend de n constantes d'intégration pour une équation d'ordre n.
- $\boldsymbol{x_P(t)}$ est **une** solution particulière de l'équation avec second membre. **Elle est de la forme du second membre et satisfait à l'équation différentielle.**

✓ **Physiquement :**

- $\boldsymbol{x(t)}$ correspond au **régime transitoire**.
- $\boldsymbol{x_h(t)}$ correspond au **régime libre**. Elle tend vers 0 pour t > 5τ où τ est le temps de relaxation du système.
- $\boldsymbol{x_P(t)}$ correspond au **régime forcé ou permanent**.

Régime transitoire = Régime libre + Régime forcé ;

Pour t > 5τ, le régime transitoire laisse place au régime forcé.

Solution générale d'une équation du 1er ordre de la forme :

Forme canonique : $\boxed{\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = cste}$;

Solution homogène : $x_h(t) = A \exp(-\frac{t}{\tau})$

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $x(t) = x_h(t) + x_p = A \exp(-\frac{t}{\tau}) + x_p$;

Déterminer A grâce à **une condition initiale**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

L'équation écrite sous cette forme fait apparaître τ la constante de temps du système, dans le cas des systèmes du premier ordre ; C'est aussi le temps de relaxation du système.

Solution générale d'une équation du 2nd ordre sans amortissement :

Forme canonique : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x(t) = cste}$;

Solution homogène : $x_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t) ou\ x_h(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $x(t) = x_h(t) + x_p = A\cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t) + x_p$;

Déterminer A et B ou C et φ grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

Solution générale d'une équation du 2nd ordre de la forme :

Forme canonique : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\, x(t) = cste}$;

Méthode de résolution :

A cette équation, on associe *l'équation caractéristique* : $\boxed{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2 = 0}$; *(1)*

Alors *Discriminant* : $\boxed{\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4).}$

✓ 1er cas : Cas du régime pseudopériodique : Δ < 0 :

Racines complexes de l'équation caractéristique : $r_{1,2} = -\frac{\frac{\omega_0}{Q} \mp i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha \pm j\Omega$;

Puis *Solution homogène* : $x_h(t) = exp\,(\alpha t)[Acos(\Omega t) + Bsin(\Omega t)]$

ou $x_h(t) = D\ exp\,(\alpha t)\cos\,(\,\Omega t + \varphi)$;

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p = e^{\alpha t}\,[Acos(\Omega t) + Bsin(\Omega t)] + x_p}$;

Déterminer A et B ou D et φ grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

✓ 2ème cas : Cas du régime critique : Δ = 0 :

Racine double de l'équation caractéristique : $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$, car Q = $\frac{1}{2}$;

Puis *Solution homogène* : $x_h(t) = (At + B)\exp(r_0 t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t)$;

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p = e^{-\omega_0 t}\,(At + B) + x_p}$;

Déterminer A et B grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**

✓ 3ème cas : Cas du régime apériodique : Δ > 0 :

Racines réelles de l'équation caractéristique : $r_{1,2} = -\frac{\frac{\omega_0}{Q} \mp \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$;

Puis *Solution homogène* : $x_h(t) = A\ ex\,p(r_1 t) + B\ ex\,p(r_2 t)$;

Solution particulière : $x_p = cste$; La déterminer entièrement.

Solution générale : $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p = A\ e^{r_1 t} + B\ e^{r_2 t} + x_p}$;

Déterminer A et B grâce à **deux conditions initiales**.

ATTENTION AUX PROBLEMES DE CONTINUITES EN ELECTRICITE **!!**