Suites et Comparaison des suites

Colle n° 12

La colle portera en priorité sur les questions asymptotiques
(limites, équivalents, développements asymptotiques).

Les développements limités n'ont pas encore été vus.

Suites

- Propriété vraies « à partir d'un certain rang », notée « APCR ».
- Suites arithmético-géométriques, Suites récurrentes d'ordre 2
- Suites convergentes (notation privilégiée : $u_n \longrightarrow \ell$) ; opérations sur les limites
- Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.
- Suites tendant vers $+\infty$ et $-\infty$
- Suites extraites. Si $u_n \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de $(u_n)_n$ tend vers ℓ
- Passage à la limite dans les inégalités larges
- Théorèmes d'existence de limites (théorème « des gendarmes », theorème « de la limite monotone »). Suites adjacentes.
- Point de vue séquentiel sur la densité et la borne supérieure
- Théorème de Bolzano-Weierstrass

Comparaison des suites

- Suites équivalentes. Notation : $u_n \sim v_n$

Proposition. Soit $(\varepsilon_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. Alors,

- $\sin(\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
- $\ln(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$
- $\exp(\varepsilon_n) - 1 \sim \varepsilon_n$
- si $a \in \mathbb{R}^*$, alors $(1+\varepsilon_n)^a - 1 \sim a \times \varepsilon_n$

- Formule de Stirling
- Suites négligeables (notation : $u_n = \mathrm{o}(v_n)$)
- Comparaisons classiques :
  - ▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall a > 1,\ n^\alpha = \mathrm{o}(a^n)$
  - ▷ $\forall a > 0,\ a^n = \mathrm{o}(n!)$
  - ▷ *etc.*
- Suites dominées
  Notation : $u_n = \mathrm{O}(u_n)$

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Formule de Bernoulli
- Théorème de dérivation de f^{-1}
- Définition de « B est dense dans A »
- Présentation « à la ε » de la borne supérieure
- Rétro-passage à la limite dans les inégalités strictes
- Théorème de Bolzano-Weierstrass

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow ?$
- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- $[a,b] = \Big\{a + t(b-a)\ ;\ t \in [0,1]\Big\}$
- $\arcsin(y) + \arccos(y) = \frac{\pi}{2}$.
- $\arccos(y) + \arccos(-y) = \pi$.
- Présentation de la partie entière
- I convexe $\implies$ I intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- **Proposition.** Soit $B \subset \mathbb{R}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) B est dense dans $\mathbb{R}$
  (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists b \in B : x \leqslant b \leqslant y$
  (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists b \in B : x < b < y$
- Contre-exemples pour :
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \exp(u_n) \sim \exp(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$
  - ▷ $u_n \sim v_n \implies (u_n)^n \sim (v_n)^n$