

Applications

Le document en annexe (sur les images réciproques et directes) a été distribué aux élèves mais ces résultats n'ont pas été démontrés.

La démonstration d'un d'entre eux pourra être posée en exercice.

Programme de la semaine de colle

Applications

- Applications : composition, injections, surjections, bijections
- Une application est bijective ssi elle admet une réciproque
- Bijection réciproque, notée f^{-1} , d'une bijection
- Fonctions indicatrices
- L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$
- Images directes (notées $f[A]$) et réciproques (notées $f^{(-1)}[B]$)

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Définition de « f (strictement) croissante »
- Définition de $\binom{n}{k}$
- Relation de Pascal
- Formule de sommation par paquets
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Résultats à savoir démontrer

- Unicité dans la division euclidienne
- La racine fonction racine carrée est strictement croissante
- Formule des « capitaines » : démonstration combinatoire
- Formule du binôme de Newton
- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\tan(\theta + \theta')$ à partir des formules d'addition de $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \leq |z|$
- Inégalité triangulaire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \geq \left| |z| - |z'| \right|$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ avec les bonnes hypothèses
- $g \circ f$ injective \implies ? (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections

« Tirés-en-arrière » et « Poussés-en-avant »

Catalogue de résultats

On considère le diagramme :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Soient $A, A' \subset E$ et soient $B, B' \subset F$ et soit $C \subset G$. Enfin, soit $x \in E$.

On a :

Divers

$$f^{(-1)}[\emptyset] = \emptyset$$

$$f^{(-1)}[F] = E$$

Opérations

$$f^{(-1)}[B \cup B'] = f^{(-1)}[B] \cup f^{(-1)}[B']$$

$$f^{(-1)}[B \cap B'] = f^{(-1)}[B] \cap f^{(-1)}[B']$$

$$f^{(-1)}[\overline{B}] = \overline{f^{(-1)}[B]}$$

Croissance

$$B \subset B' \implies f^{(-1)}[B] \subset f^{(-1)}[B']$$

Composition

$$(g \circ f)^{(-1)}[C] = f^{(-1)}[g^{(-1)}[C]]$$

L'application « tiré-en-arrière »

L'application

$$\mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$B \longmapsto f^{(-1)}[B]$$

est injective (resp. surjective) ssi f est surjective (resp. injective).**Divers**

$$f[\emptyset] = \emptyset$$

$$f[E] \subset F$$

$$f[\{x\}] = \{f(x)\}$$

Opérations

$$f[A \cup A'] = f[A] \cup f[A']$$

$$f[A \cap A'] \subset f[A] \cap f[A']$$

Ni $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$ ni $f[\overline{A}] \supset \overline{f[A]}$ ne sont vraies en général.**Croissance**

$$A \subset A' \implies f[A] \subset f[A']$$

Composition

$$(g \circ f)[A] = g[f[A]]$$

L'application « poussé-en-avant »

L'application

$$\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F)$$

$$A \longmapsto f[A]$$

est injective (resp. surjective) ssi f est injective (resp. surjective).« Tiré-en-arrière » puis « poussé-en-avant » (et *vice versa*)

$$f[f^{(-1)}[B]] \subset B \quad \text{et} \quad A \subset f^{(-1)}[f[A]]$$