

Fonctions usuelles, convexité

- Par définition, dans un tableau de variations, les signes et les monotonies sont stricts.
- L'étude du signe de $f(x)$ doit inclure la résolution de $f(x) \geq 0$ et de $f(x) = 0$.
- On fera attention à bien suivre cette règle.

Programme de la semaine de colle

Fonctions usuelles

- Généralités sur les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
- Études de fonctions (révision du lycée : tableau de variations avec limites, *etc.*) ; application à la preuve d'égalités ou d'inégalités ; \ln , \exp , *etc.*
- $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto a^x$
- Fonctions trigonométriques, fonctions trigonométriques hyperboliques
- Espace de fonctions $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{R})$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$ pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- Dérivation des fonctions à valeurs complexes
- Relation de négligeabilité $f(x) = o(g(x))$ quand $x \rightarrow +\infty$;
- Transformation du graphe \mathcal{C}_f quand f est remplacée par

$$x \mapsto f(x + a), f(x) + b, f(-x), \lambda f(x), f(a - x), \text{ etc.}$$

- Bijection réciproque d'une fonction $f : I \rightarrow J$ (monotonie, continuité, graphe)
- Dérivation de f^{-1}
- Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin, arccos (graphes, dérivée, relations fondamentales, calculs de $\cos(\arcsin)$ et $\sin(\arccos)$)

Convexité

- Cas général
- Cas dérivable, cas \mathcal{D}^2
- Inégalité de Jensen
- Application à \ln , \exp et \sin

Note pour les colleurs

Attention : la fonction \arctan n'a pas encore été vue.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Définition de $\binom{n}{k}$
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de \ln , \exp et \sin
- Dérivées de \arcsin , \arccos ; graphes

Résultats à savoir démontrer

- Unicité dans la division euclidienne
- La racine fonction racine carrée est strictement croissante
- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\tan(\theta + \theta')$ à partir des formules d'addition de $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \leq |z|$
- Inégalité triangulaire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \geq \left| |z| - |z'| \right|$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ avec les bonnes hypothèses
- $g \circ f$ injective $\implies ?$ (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections
- Montrer que $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- $[a, b] = \left\{ ta + (1 - t)b ; t \in [0, 1] \right\}$
- Inégalité de Jensen
- \arcsin est impaire
- $\arcsin + \arccos = \widetilde{\frac{\pi}{2}}$: démonstration sans utiliser la dérivation