

## Fonctions usuelles, convexité

- Par définition, dans un tableau de variations, les signes et les monotonies sont stricts.
- L'étude du signe de  $f(x)$  doit inclure la résolution de  $f(x) \geq 0$  et de  $f(x) = 0$ .
- On fera attention à bien suivre cette règle.

### Programme de la semaine de colle

#### Fonctions usuelles

- Généralités sur les fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$
- Études de fonctions (révision du lycée : tableau de variations avec limites, *etc.*) ; application à la preuve d'égalités ou d'inégalités ;  $\ln$ ,  $\exp$ , *etc.*
- $x \mapsto x^a$  et  $x \mapsto a^x$
- Fonctions trigonométriques, fonctions trigonométriques hyperboliques
- Espace de fonctions  $\mathcal{D}^p(I, \mathbb{R})$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$  pour  $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .
- Dérivation des fonctions à valeurs complexes
- Relation de négligeabilité  $f(x) = o(g(x))$  quand  $x \rightarrow +\infty$  ;
- Transformation du graphe  $\mathcal{C}_f$  quand  $f$  est remplacée par

$$x \mapsto f(x + a), f(x) + b, f(-x), \lambda f(x), f(a - x), \text{ etc.}$$

- Bijection réciproque d'une fonction  $f : I \rightarrow J$  (monotonie, continuité, graphe)
- Dérivation de  $f^{-1}$
- Fonctions trigonométriques réciproques : arcsin, arccos (graphes, dérivée, relations fondamentales, calculs de  $\cos(\arcsin)$  et  $\sin(\arccos)$ )

#### Convexité

- Cas général
- Cas dérivable, cas  $\mathcal{D}^2$
- Inégalité de Jensen
- Application à  $\ln$ ,  $\exp$  et  $\sin$

#### Note pour les colleurs

Attention : la fonction  $\arctan$  n'a pas encore été vue.

# Questions de cours

## Résultats à savoir énoncer

- Négation de  $P \implies Q$
- Définition de  $\binom{n}{k}$
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire
- Dérivabilité de  $f^{-1}$  et expression de la dérivée
- Définition de  $f$  convexe
- Inégalité de convexité de  $\ln$ ,  $\exp$  et  $\sin$
- Dérivées de  $\arcsin$ ,  $\arccos$  ; graphes

## Résultats à savoir démontrer

- Unicité dans la division euclidienne
- La racine fonction racine carrée est strictement croissante
- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\tan(\theta + \theta')$  à partir des formules d'addition de  $\cos(\cdot)$  et  $\sin(\cdot)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \leq |z|$
- Inégalité triangulaire
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \geq \left| |z| - |z'| \right|$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  avec les bonnes hypothèses
- $g \circ f$  injective  $\implies ?$  (avec les bonnes hypothèses)
- Résultats analogues pour les surjections
- Montrer que  $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ .
- Formule donnant  $(f^{-1})'$
- $[a, b] = \left\{ ta + (1 - t)b ; t \in [0, 1] \right\}$
- Inégalité de Jensen
- $\arcsin$  est impaire
- $\arcsin + \arccos = \widetilde{\frac{\pi}{2}}$  : démonstration sans utiliser la dérivation