

— Semaine du lundi 11 décembre au vendredi 15 décembre —

## Début de polynômes

### Calcul intégral

Colle n° 11

## Programme de la semaine de colle

### Début des polynômes

#### Note pour les colleurs

Les racines multiples, l'arithmétique des polynômes, les question de factorisation de polynômes n'ont pas été vus. Tout cela sera vu dans un chapitre « Arithmétique des polynômes »

- $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ; pour les meilleurs  $K[X]$  ou  $A[X]$ )
- $\mathbb{K}[X]$  : la construction est non exigible et n'a pas été abordée
- $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$
- Coefficients (notés  $c_k[P]$ ), coefficient constant, coefficient dominant (notés  $c_{\text{dom}}[P]$ ), terme dominant, degré
- Formules de Newton et Bernoulli polynomiales
- $\mathbb{K}_n[X]$
- Expression générale des coefficients du produit
- $\deg(PQ)$  et  $\deg(P + Q)$
- Intégrité et régularité
- Racines (l'ensemble des racines de  $P$  dans  $\mathbb{K}$  est noté  $Z_{\mathbb{K}}(P)$ )
- Fonction  $\tilde{P}$  associée à  $P \in \mathbb{K}[X]$
- Le nombre de racines est borné par le degré
- « Critère radicaux de nullité » :
  - ▷ deux polynômes de  $\mathbb{K}_n[X]$  qui coïncident sur un ensemble de cardinal  $\geq n + 1$  sont égaux
  - ▷ deux polynômes qui coïncident sur un ensemble infini sont égaux
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$
- Division euclidienne polynomiale
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Composition des polynômes
- Dérivation des polynômes

### Calcul intégral

- Primitives usuelles
- Intégration par parties
- Changements de variable
- Primitives des fonctions du type  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  avec  $a, b, c$  non tous nuls
- Primitives des fonctions « polynomiales en  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  », par linéarisation

#### Note pour les colleurs

La pratique des IPP et des changements de variable se fait sans justification invoquant les bons caractères  $\mathcal{C}^1$ .

# Questions de cours

## Résultats à savoir énoncer

- Négation de  $P \implies Q$
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Dérivabilité de  $f^{-1}$  et expression de la dérivée
- Définition de  $f$  convexe
- Inégalité de convexité de  $\ln$ ,  $\exp$  et  $\sin$
- Dérivées de  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$  ; graphes
- Expression du coefficient « en  $X^k$  » de  $P \times Q$

## Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\tan(\theta + \theta')$  à partir des formules d'addition de  $\cos(\cdot)$  et  $\sin(\cdot)$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \geq \left| |z| - |z'| \right|$
- Formule donnant  $(f^{-1})'$
- Inégalité de Jensen
- $\varphi$  injectif  $\iff \text{Ker}(\varphi) = \{e\}$ .
- Division euclidienne polynomiale : unicité
- Division euclidienne polynomiale : existence
- $P(\alpha) = 0 \iff \exists Q : P = (X - \alpha)Q$
- $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$