— Semaine du lundi 8 janvier au vendredi 12 janvier —

Suites

Colle n° 13

La colle pourra aussi porter sur les nombres réels.

Programme de la semaine de colle

Nombres réels

- Propriété vraies « à partir d'un certain rang », notée « APCR ».
- Suites arithmético-géométriques, Suites récurrentes d'ordre 2
- Suites convergentes (notation privilégiée : $u_n \longrightarrow \ell$) ; opérations sur les limites
- Suites tendant vers $+\infty$ et $-\infty$
- Suites extraites. Si $u_n \longrightarrow \ell$, toute suite extraite de $(u_n)_n$ tend vers ℓ
- Passage à la limite dans les inégalités larges
- Théorèmes d'existence de limites (théorème « des gendarmes », theorème « de la limite monotone »). Suites adjacentes.
- Point de vue séquentiel sur la densité et la borne supérieure
- Théorème de Bolzano-Weierstrass

Note pour les colleurs
Le langage des équivalents et des « petits o » n'a pas encore été vu.

Questions de cours

Résultats à savoir énoncer

- Négation de $P \implies Q$
- Relation de Pascal
- Formule de Bernoulli
- Inégalités triangulaires (simple, négative, généralisée, renversée, bilatérale)
- Dérivabilité de f^{-1} et expression de la dérivée
- Définition de f convexe
- Inégalité de convexité de ln, exp et sin
- Dérivées de arcsin, arccos, arctan ; graphes
- Définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ »
- Adhérence à la partie (« à la ε ») de la borne supérieure/inférieure

Petites preuves à savoir refaire automatiquement

- $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \longrightarrow ?$
- La partie entière est croissante. Raffinement de la croissance.
- Trouver le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

Résultats à savoir démontrer

- Relation de Pascal : démonstration combinatoire
- $\tan(\theta+\theta')$ à partir des formules d'addition de $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \geqslant \Big||z|-|z'|\Big|$
- Formule donnant $(f^{-1})'$
- Inégalité de Jensen
- $P(\alpha)=0 \iff \exists Q : P=(X-\alpha)Q$
- $X^n-1=\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(X-\omega)$
- Présentation de la partie entière
- I convexe $\implies$ I intervalle : démonstration d'un des neuf cas.
- **Proposition**
  Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) A *est dense dans* $\mathbb{R}$
  (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x<y \implies \exists a \in A : x \leqslant a \leqslant y$
  (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x<y \implies \exists a \in A : x < a < y$
- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}\ ;\ a_n \longrightarrow x$
- Soit A majorée et non vide. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, croissante, telle que $a_n \longrightarrow \sup(A)$.